B.V. SHABAT

INTRODUCTION À L'ANALYSE COMPLEXE

1
FONCTIONS D'UNE VARIABLE

B. CHABAT

INTRODUCTION À L'ANALYSE COMPLEXE

(EN DEUX TOMES)

TOME 1

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

ÉDITIONS MIR MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 7
Avant-propos à la troisième édition russe 10

Chapitre premier. FONCTIONS HOLOMORPHES 11

§ 1. Plan complexe 11
1. Nombres complexes (11). 2. Topologie du plan complexe (16). 3. Chemins et courbes (19). 4. Domaines (22).
§ 2. Fonctions d'une variable complexe 25
5. Notion de fonction (25). 6. Différentiabilité (30). 7. Significations géométrique et hydrodynamique (38).
§ 3. Propriétés des fonctions homographiques 44
8. Fonctions homographiques (44). 9. Propriétés géométriques (48). 10. Isomorphismes et automorphismes homographiques (51). 11. Un modèle de géométrie de Lobatchevski (55).
§ 4. Fonctions élémentaires 62
12. Quelques fonctions rationnelles (62). 13. Exponentielle (66). 14. Fonctions trigonométriques (68).
Exercices 72

Chapitre II. Propriétés des fonctions holomorphes 76

§ 5. Intégrale 76
15. Notion d'intégrale (76). 16. Primitive (81). 17. Théorème de Cauchy (88). 18. Cas particuliers (91). 19. Formule intégrale de Cauchy (96).
§ 6. Séries de Taylor 101
20. Séries de Taylor (102). 21. Propriétés des fonctions holomorphes (109). 22. Théorèmes d'unicité (112). 23. Théorème de Weierstrass et de Runge (115).
§ 7. Séries de Laurent et points singuliers 121
24. Séries de Laurent (121). 25. Points singuliers isolés (128). 26. Résidus (136).
Exercices 143

Chapitre III. PROLONGEMENT ANALYTIQUE 145

§ 8. Notion de prolongement analytique 145
27. Eléments et leurs prolongements (145). 28. Théorème de la monodromie (153).
§ 9. Fonctions analytiques 158
29. Notion de fonction analytique (158). 30. Fonctions élémentaires (162). 31. Points singuliers (171).

§ 10. Notion de surface de Riemann 177
32. Approche élémentaire (177). 33. Approche générale (181).
Exercices 187

Chapitre IV. ÉLÉMENTS DE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE 189

§ 11. Principes géométriques 189
34. Principe de l'argument (189). 35. Principe de conservation du domaine (193). 36. Notion de fonction algébrique (198). 37. Principe du maximum du module et lemme de Schwarz (202).
§ 12. Théorème de Riemann 205
38. Isomorphismes et automorphismes conformes (205). 39. Principe de compacité (208). 40. Théorème de Riemann (212).
§ 13. Correspondance des frontières et principe de symétrie 217
41. Correspondance des frontières (217). 42. Principe de symétrie (222). 43. Notion de fonctions elliptiques (227). 44. Fonction modulaire et théorème de Picard (231).
Exercices 235

Chapitre V. MÉTHODES ANALYTIQUES 238

§ 14. Développements des fonctions entières et méromorphes 238
45. Théorème de Mittag-Leffler (238). 46. Théorème de Weierstrass (245).
§ 15. Croissance des fonctions entières 252
47. Ordre et type d'une fonction entière (252). 48. Croissance et zéros. Théorème d'Hadamard (255).
§ 16. Autres théorèmes faisant intervenir la croissance 262
49. Principe de Phragmén — Lindelöf (262). 50. Théorème de Kotelnikov (265).
§ 17. Estimations asymptotiques 271
51. Développements asymptotiques (271). 52. Méthode de Laplace (275). 53. Méthode du col (280).
Exercices 284

Annexe. FONCTIONS HARMONIQUES ET SUBHARMONIQUES 287
1. Fonctions harmoniques (287). 2. Problème de Dirichlet (292). 3. Fonctions subharmoniques (298).
Exercices 305

Index alphabétique des matières 307

A la mémoire de mon maître

Alexei Lavrentiev

AVANT-PROPOS *)

L'analyse circonstanciée des propriétés des fonctions est inimaginable dans le seul cadre du réel. Un exemple simple : la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est indéfiniment dérivable en tout point de l'axe réel et pourtant sa série de Taylor

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$$

cesse de converger pour $|x| \geqslant 1$. La cause en est incompréhensible dans un domaine réel : en effet, les points $x = \pm 1$ qui séparent les domaines de convergence et de divergence de la série n'ont rien de remarquable pour $f(x)$. Mais le passage à un domaine complexe explique aussitôt cette situation : le cercle $|x| = 1$ contient les points $x = \pm\sqrt{-1}$ en lesquels la fonction $f(x)$ devient infinie et la série cesse de converger.

Le passage à l'étude des fonctions d'une variable complexe est indispensable dans de nombreux problèmes. Il est aussi naturel que le passage du corps des réels à celui algébriquement clos des complexes. Et le plus étonnant c'est que pour les fonctions de nombres complexes, lesquelles d'après le célèbre théorème de Frobénius (1878) fournissent la seule extension possible du corps des nombres réels avec préservation des opérations algébriques, on a réussi à élaborer une analyse aussi complète et élégante que pour les fonctions d'une variable réelle.

Le passage à l'analyse complexe nous permet d'étudier en profondeur les fonctions élémentaires et d'établir d'intéressantes relations entre elles. Ainsi les fonctions trigonométriques sont des combinaisons simples des fonctions exponentielles, par exemple $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e)^{-x\sqrt{-1}}$. Des relations remarquables et assez inattendues sont mises en évidence entre les quantités réelles et « imaginaires » telle par exemple $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

*) Tiré de l'avant-propos à la première édition russe de 1969.

En analyse réelle une théorie élégante a été mise au point pour les seules fonctions univalentes, les fonctions multivalentes étant assez capricieuses. En analyse complexe on a réussi à éclaircir la nature de la multivalence et à bâtir une théorie des fonctions multivalentes sans faille.

L'analyse complexe fournit des méthodes efficaces de calcul des intégrales et d'estimations asymptotiques, des méthodes d'étude des solutions d'équations différentielles, etc. : la liste des problèmes solvables par les méthodes de l'analyse complexe peut être prolongée à loisir. A signaler que les fonctions d'une variable complexe décrivent des champs de vecteurs plans et de plus qu'une attention particulière est réservée aux fonctions auxquelles sont associés les champs les plus intéressants pour les applications : les champs harmoniques, i.e. à la fois lamellaires et solénoïdaux. Ceci explique les multiples applications de l'analyse complexe dans divers domaines.

L'analyse complexe doit son attrait à son authentique universalité. Elle combine des méthodes analytiques et géométriques classiques et nouvelles, des problèmes appliqués concrets et des problèmes abstraits généraux. Elle fait une large place aux diverses branches des mathématiques et des sciences appliquées. Les notions d'analyse complexe servent de modèle, de source et de point de départ à de nombreuses recherches en analyse fonctionnelle, algèbre, topologie, géométrie algébrique et différentielle, équations aux dérivées partielles et autres branches des mathématiques.

Les idées liminaires de l'analyse complexe ont émergé à la deuxième moitié du XVIIIe siècle et sont principalement liées au nom de Léonard Euler. Le corps de cette théorie s'est formé au XIXe siècle grâce essentiellement aux travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass. La théorie des fonctions d'une seule variable complexe, qui est la partie la plus classique de l'analyse complexe, peut être considérée de nos jours comme une théorie achevée. Il n'empêche cependant qu'elle ne cesse de poser de nouveaux problèmes aussi bien théoriques que pratiques. La partie la plus jeune — la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes — comporte encore beaucoup de blancs. Mais cette branche qui se caractérise par la richesse de ses liens avec de nombreuses disciplines scientifiques des mathématiques modernes attire de plus en plus l'attention des mathématiciens.

Il est probablement venu le temps où ceux qui étudient l'analyse complexe doivent s'initier aux bases de la théorie des fonctions non seulement d'une mais de plusieurs variables complexes. Mais malgré des propriétés communes (relativement élémentaires) ces deux parties possèdent des traits qui les différencient fondamentalement l'une de l'autre. Aussi, du moins au stade actuel du développement de la science, est-il préférable de les étudier l'une après l'autre et non simultanément. A l'Université de Moscou cet objectif est atteint

par l'institution d'un cours spécial pour les étudiants se spécialisant en théorie des fonctions.

Il existe de nombreux ouvrages remarquables en théorie des fonctions d'une variable complexe et des guides de théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Mais il n'existe encore pas d'exposé unique de ces deux parties et le nôtre nous semble être une première dans ce genre. Cet ouvrage qui a son origine dans les cours faits par l'auteur à l'Université de Moscou a été conçu de façon à illustrer dans le cadre unidimensionnel (tome 1) les principes maîtres de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (tome 2).

L'idée d'écrire cet ouvrage m'a été suggérée par A. Guelfond qui hélas nous a quittés avant sa parution. A. Gontchar a lu le manuscrit et fait de nombreuses remarques utiles. De nombreux conseils judicieux m'ont été donnés par V. Vladimirov, B. Lévine et A. Markouchévitch ; V. Zoritch m'a aidé dans le choix des exercices. A tous ces collègues j'exprime ma profonde gratitude. Je dois beaucoup au rédacteur E. Tchirka qui a attentivement lu le manuscrit et m'a signalé de nombreuses imperfections.

Septembre 1968 *B. Chabat*

AVANT-PROPOS À LA TROISIÈME ÉDITION RUSSE

Cette édition est publiée en deux tomes consacrés respectivement aux fonctions d'une seule et de plusieurs variables complexes. Le tome 1 a fait l'objet d'un léger remaniement portant sur le prolongement analytique et la croissance des fonctions entières. Ont été ajoutées des sections relatives à la notion de fonction algébrique, aux propriétés élémentaires des fonctions elliptiques et au théorème de Kotelnikov.

Le texte est complété d'exercices (marqués d'un ✱). Comme ils sont de complexité différente, le lecteur ne doit pas se décourager de ne pas trouver rapidement la solution. Pour sélectionner ces exercices j'ai utilisé la liste dressée par A. Vitouchkine pour le cours qu'il a lu à l'Université de Moscou : qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Les exercices inclus en fin de chaque chapitre ont pour but d'affermir les connaissances théoriques et ne peuvent donc se substituer à un recueil d'exercices.

La nouvelle édition du tome 1 comporte des informations historiques sur l'émergence des notions fondamentales d'analyse complexe. Pour les concocter je me suis largement inspiré du dernier ouvrage de feu A. Markouchévitch *Théorie des fonctions analytiques* (chapitre II du livre *Mathématiques du XIX*^{e} *siècle*, M., Naouka, 1981). Le tome 2 a subi un remaniement plus profond entraîné par l'intense développement de l'analyse complexe multidimensionnelle des dernières années et la modification des estimations des divers résultats de l'auteur. Bref, la nouvelle édition met l'accent sur l'aspect géométrique et sur les résultats qui ont trouvé application en analyse et en physique théorique. L'analyse complexe multidimensionnelle est encore à l'état de gestation, c'est pourquoi les informations historiques du tome 2 ne concernent que les résultats les plus classiques.

En conclusion j'exprime ma reconnaissance aux nombreux lecteurs qui m'ont communiqué leurs remarques critiques sur les diverses sections de cet ouvrage.

Mai 1984 *B. Chabat*

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS HOLOMORPHES

Commençons par la description des nombres complexes et des opérations sur eux. Nous supposerons ces notions connues du lecteur, aussi notre description, qui sera brève, n'insistera-t-elle que sur les seuls éléments utiles pour notre exposé.

§ 1. Plan complexe

1. Nombres complexes. Considérons l'ensemble **C** des couples de réels $z = (x, y)$ ou, ce qui est équivalent, des points du plan cartésien xOy, ou encore les vecteurs (libres) du plan. Deux vecteurs $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ sont *égaux* et notés $z_1 = z_2$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. Les vecteurs $z = (x, y)$ et $\bar{z} = (x, -y)$ qui sont représentés par des points symétriques par rapport à l'axe x sont dits *conjugués*. Identifions le vecteur $(x, 0)$ au réel x; désignons par **R** l'ensemble de tous les réels (l'axe x). Les réels et eux seuls sont tels que $\bar{z} = z$.

Munissons l'ensemble **C** d'une structure de corps. Introduisons l'addition et la multiplication par un scalaire λ comme en analyse vectorielle. Nous pouvons alors représenter tout élément $z \in \mathbf{C}$ sous la forme *cartésienne*:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy, \tag{1}$$

où $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$ désignent les vecteurs unitaires respectifs des axes x et y (nous omettrons d'écrire le premier vecteur unitaire).

On introduit deux produits en analyse vectorielle: le *produit scalaire*

$$(z_1, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2, \tag{2}$$

et le *produit vectoriel*

$$z_1 \wedge z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 \text{ *)}. \tag{3}$$

*) Dans le cas général le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire au plan tendu sur les deux vecteurs facteurs. Mais dans le cas d'un champ vectoriel plan, qui sera le seul envisagé ici, tous les produits vectoriels sont colinéaires et donc définis par un scalaire (3).

Or on sait qu'aucun de ces produits ne satisfait aux axiomes d'un corps. Il nous faut donc définir une autre multiplication sur **C**. Plus exactement, posons par définition $i \cdot i = i^2 = -1$ et appelons *produit* $z_1 z_2$ le vecteur obtenu en multipliant $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$ comme des binômes. Autrement dit, posons par définition

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{4}$$

(on remarquera que $i^2 = -1$ est un cas particulier de (4)). Il est évident que ce produit s'exprime en fonction des produits scalaire et vectoriel de la manière suivante:

$$z_1 z_2 = (\bar{z}_1,\ z_2) + i\,(\bar{z}_1 \wedge z_2), \tag{5}$$

où $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ est le conjugué de z_1.

✱ Quelles sont les failles des définitions suivantes du produit de nombres complexes:

a) $z_1 z_2 = x_1 x_2 + iy_1 y_2$;
b) $z_1 z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$? ✱

Nous admettrons connu le fait que ces opérations confèrent à l'ensembre **C** une structure de corps, appelé *corps des nombres complexes* dont les éléments — les vecteurs $z = x + iy$ — s'appellent *nombres complexes*. Donc un nombre complexe $z = (x, y)$ est un couple de réels x et y appelés respectivement (par respect à la tradition) partie *réelle* et partie *imaginaire* de z et notés

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{6}$$

Les nombres $z = (0, y)$ tels que $\operatorname{Re} z = 0$ (toujours par respect à la tradition) sont dits *imaginaires purs*.

La forme cartésienne (1) se prête bien à l'addition (et à la soustraction). Mais sur la formule (4) on voit que la multiplication (et la division) donne lieu à des calculs assez volumineux. Pour ces dernières opérations (ainsi que pour l'exponentiation et l'extraction d'une racine) il est plus avantageux de représenter un nombre complexe sous sa forme polaire

$$z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{7}$$

qui découle de (2) par passage aux coordonnées polaires. Les coordonnées polaires de tout nombre complexe non nul $z = x + iy$ sont le rayon polaire $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'angle polaire φ, i.e. l'angle de l'axe positif x et du vecteur z. Ces coordonnées s'appellent respectivement *module* et *argument* de z et se notent

$$r = |\,z\,|, \quad \varphi = \arg z; \tag{8}$$

le module est défini de façon unique, l'argument, à $2k\pi$ près. Pour simplifier l'écriture introduisons la notation condensée:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{9}$$

(on se sert ici du fait que l'élévation à une puissance imaginaire n'est pas définie *) et donc le symbole correspondant est libre); la forme polaire (7) devient alors

$$z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

En se servant de formules élémentaires de trigonométrie et de la définition de la multiplication (4), on obtient la relation

$$r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{11}$$

qui met en évidence l'adéquation de la notation (9). La relation (11) exprime que lorsqu'on multiplie des nombres complexes, leurs modules se multiplient et leurs arguments s'ajoutent. La division des nombres complexes mis sous la forme polaire est également simple:

$$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{12}$$

(à condition bien sûr que $r_2 \neq 0$).

Dans certaines questions il est plus commode de *compactifier* l'ensemble des nombres complexes **C**. Cette procédure consiste à lui ajouter le *point à l'infini* $z = \infty$. Contrairement aux points finis ($z \neq \infty$), le point à l'infini n'intervient pas dans les opérations algébriques. Le plan compactifié (i.e. le plan **C** complété du point à l'infini) sera appelé *plan fermé* et désigné par $\overline{\mathbf{C}}$. Le plan **C** sera appelé *ouvert* pour marquer la différence.

Cette procédure de compactification peut être rendue plus suggestive si les images des nombres complexes sont les points d'une sphère. A cet effet rapportons l'espace euclidien à un système de coordonnées rectangulaires ξ, η et ζ dont les axes ξ et η sont confondus respectivement avec les axes x et y, et considérons la sphère unité

$$S: \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{13}$$

(fig. 1). A chaque point $z\,(x, y) \in \mathbf{C}$ associons le point $Z\,(\xi, \eta, \zeta)$ d'intersection de S avec le rayon qui joint le « pôle Nord » $N\,(0, 0, 1)$ de S au point z.

La correspondance $z \to Z$ s'appelle *projection stéréographique*. En portant l'équation $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1 - t$ du rayon Nz dans (13) on trouve que $t\,(1 + |z|^2) = 2$ au point Z et les équations de

*) Au n° 13 on définira cette opération et on montrera que la formule (9) dont le second membre contient le nombre e (la base du logarithme népérien) à une puissance imaginaire a bien lieu.

la projection stéréographique sont

$$\xi = \frac{2x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}. \tag{14}$$

De la dernière équation on déduit que $\frac{2}{1+|z|^2} = 1 - \zeta$, et des deux premières, les formules de l'application inverse:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{15}$$

On voit sur (14) et (15) que la projection stéréographique $z \to Z$ établit une correspondance biunivoque entre $\mathbf{C}$ et $S \setminus N$ (il est évident que le point N n'est l'image d'aucun point z). On conviendra que N est l'image du point à l'infini $z = \infty$; ce faisant, on établit une correspondance biunivoque entre $\overline{\mathbf{C}}$ et S. On identifiera généralement $\overline{\mathbf{C}}$ à S et on appellera S *sphère des nombres complexes* ou *sphère de Riemann*. On peut identifier le plan ouvert $\mathbf{C}$ à $S \setminus N$, i.e. à la sphère S privée du pôle Nord N.

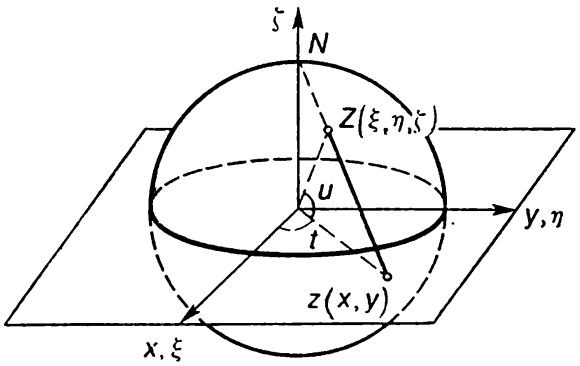

Fig. 1

✱ Soient t la longitude et u la latitude d'un point $Z \in S$ (fig. 1). Montrer que Z est l'image par la projection stéréographique du point $z = se^{it}$, où $s = \operatorname{tg}(\pi/4 + u/2)$. ✱

Munissons l'ensemble $\mathbf{C}$ de deux métriques correspondant aux deux procédés de représentation des nombres complexes. La première est la *métrique euclidienne* ordinaire

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}. \tag{16}$$

La deuxième est la *métrique sphérique*, c'est-à-dire la distance euclidienne des images sphériques des points z_1 et z_2. En se servant des formules (14) on trouve par des calculs peu compliqués que la distance sphérique $\rho(z_1, z_2)$ de deux points z_1, z_2 de $\mathbf{C}$ est

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_2-z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{17}$$

On peut généraliser cette formule à l'ensemble $\overline{\mathbf{C}}$ en posant *)

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{18}$$

*) On obtient la formule (18) à partir de la formule (17) en posant $z_1 = z$, en divisant le numérateur et le dénominateur par z_2 et en faisant tendre z_2 vers ∞.

Il est évident que pour tout couple $z_1, z_2 \in \bar{\mathbf{C}}$ on a $\rho(z_1, z_2) \leqslant 2$. Il est immédiat de vérifier que cette métrique munit l'ensemble $\mathbf{C}$ d'une structure d'*espace métrique*, i.e. cette métrique satisfait aux axiomes ordinaires de la distance. En particulier, l'axiome du triangle prend ici la forme classique

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{19}$$

Signalons enfin que les métriques euclidienne et sphérique sont *équivalentes* sur des ensembles bornés $M \subset \mathbf{C}$ contenus dans un disque fixe $\{|z| \leqslant R\}$, $R < \infty$. En effet, si $M \subset \{|z| \leqslant R\}$, on voit sur (17) que pour tout couple $x_1, x_2 \in M$ on a la double inégalité

$$\frac{2\,|z_2 - z_1|}{1+R^2} \leqslant \rho(z_1, z_2) \leqslant 2\,|z_2 - z_1| \tag{20}$$

(pour plus de détails voir le numéro suivant). C'est pourquoi la métrique sphérique est généralement utilisée pour les ensembles non bornés. En principe, on envisagera la métrique euclidienne sur $\mathbf{C}$ et la métrique sphérique, sur $\bar{\mathbf{C}}$.

Concluons ce numéro par un bref historique. Les nombres complexes en tant que racines de nombres négatifs sont mentionnés pour la première fois dans l'œuvre de J. Cardan *Ars magna* (1545); Cardan estimait qu'en principe ces nombres pouvaient être introduits mais, d'après lui, ceci n'avait pas de sens. Ce verdict allait rapidement être cassé: en 1572 R. Bombelli expose dans son *Algèbre* les opérations sur ces nombres et montre comment on peut s'en servir pour résoudre des équations cubiques *). Pendant très longtemps les nombres complexes furent considérés comme des êtres mystérieux. G. Leibniz les considérait en 1702 comme un « remarquable et merveilleux refuge de l'esprit humain, une sorte d'amphibie de l'être et du non-être »; le même Leibniz estimait que $x^4 + 1$ ne pouvait être décomposé en un produit de carrés (alors que ceci est élémentaire avec les nombres complexes).

Les nombres complexes sont mis à l'honneur en mathématiques dans les travaux de L. Euler (cf. page 36); on lui doit en outre la formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ (1748). La représentation géométrique des nombres complexes en tant que procédé de description des vecteurs plans apparaît pour la première fois dans l'œuvre de l'arpenteur danois K. Vessel (1799), puis chez J. Argand (1806). Ces travaux n'eurent pas un grand retentissement: même Cauchy qui est l'auteur de résultats fondamentaux en analyse complexe (cf. page 100) considérait à ses débuts les nombres complexes seulement

*) L'ouvrage de Bombelli renferme entre autres la relation

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4.$$

comme des symboles commodes pour les calculs et les égalités complexes, comme une forme conventionnelle d'écriture des égalités entre deux quantités réelles.

La première description systématique des nombres complexes et des opérations sur eux et leur interprétation géométrique furent données en 1831 par C. Gauss dans son mémoire *Théorie des résidus bicarrés*; c'est lui qui introduisit le terme de « nombre complexe ».

2. Topologie du plan complexe. Nous avons transformé les ensembles $\mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{C}}$ en espaces métriques en les munissant de métriques. Définissons maintenant sur ces ensembles les topologies associées à ces métriques.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire; par ε-voisinage $U_{z_0} = U(z_0, \varepsilon)$ d'un point $z_0 \in \mathbf{C}$ (pour la métrique euclidienne) on comprendra le disque de rayon ε centré en z_0, i.e. l'ensemble des points $z \in \mathbf{C}$ satisfaisant à l'inégalité

$$|z - z_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

Par ε-voisinage d'un point $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ on comprendra l'ensemble des points $z \in \overline{\mathbf{C}}$ tels que

$$\rho(z, z_0) < \varepsilon. \tag{2}$$

La formule (18) du n° 1 montre que l'inégalité $\rho(z, \infty) < \varepsilon$ équivaut à l'inégalité $|z| > \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} - 1}$; donc à un ε-voisinage du point à l'infini est associé l'extérieur d'un disque centré en l'origine des coordonnées (et complété par le point $z = \infty$).

On dit qu'un ensemble Ω de $\mathbf{C}$ (ou de $\overline{\mathbf{C}}$) est *ouvert* s'il contient un voisinage de chacun de ses points.

Il est immédiat de vérifier que cette définition d'un ensemble ouvert confère à $\mathbf{C}$ et à $\overline{\mathbf{C}}$ une structure d'espace topologique.

Il est plus commode parfois de se servir des *voisinages pointés*, i.e. des ensembles de points z de $\mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{C}}$ satisfaisant respectivement aux inégalités

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon, \quad 0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon. \tag{3}$$

Dans ce numéro nous définirons les principales notions topologiques qui seront constamment utilisées dans la suite.

Définition 1. On dit qu'un point $z_0 \in \mathbf{C}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}$) est un *point d'accumulation* d'un ensemble $M \subset \mathbf{C}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}$) si tout voisinage pointé de z_0 pour la topologie de $\mathbf{C}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}$) contient au moins un point de M. Un ensemble M est dit *fermé* s'il contient tous ses points d'accumulation. On appelle *adhérence* de M et on note $\overline{M}$ l'ensemble formé de M et de ses points d'accumulation.

Exemple. L'ensemble M des entiers relatifs $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ne possède pas de points d'accumulation dans $\mathbf{C}$ (donc est fermé). Dans $\overline{\mathbf{C}}$ il possède un seul point d'accumulation, $z = \infty$, qui ne lui appartient pas (donc M n'est pas fermé dans $\overline{\mathbf{C}}$).

Dans $\overline{\mathbf{C}}$ *tout ensemble infini possède au moins un point d'accumulation* (principe de compacité).

Ce principe qui exprime que $\overline{\mathbf{C}}$ est complet peut être déduit de l'axiome de complétude des nombres réels; nous glisserons sur cette démonstration. Le principe de compacité est mis en défaut dans $\mathbf{C}$ (ceci ressort de l'exemple ci-dessus). Il est valable toutefois pour les ensembles bornés infinis, i.e. pour les ensembles contenus dans un disque $\{|z| < R\}$, $R < \infty$. De tels ensembles seront dits *compacts.*

De l'inégalité (20) du n° 1 il s'ensuit visiblement qu'un point $z_0 \neq \infty$ est un point d'accumulation de M pour la topologie de $\mathbf{C}$ si et seulement s'il l'est pour la topologie de $\mathbf{C}$. En d'autres termes, dans la définition des points d'accumulation finis on peut se servir indifféremment de la métrique euclidienne comme de la métrique sphérique. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre l'équivalence de ces métriques.

Définition 2. On appellera *suite* $\{a_n\}$ une application de l'ensemble des entiers positifs dans $\mathbf{C}$ (ou $\overline{\mathbf{C}}$), autrement dit, une fonction d'une variable entière positive à valeurs complexes. On dira qu'un point $a \in \mathbf{C}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}$) est un *point d'accumulation d'une suite* $\{a_n\}$ si tout voisinage de a pour la topologie de $\mathbf{C}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}$) contient une infinité de termes de cette suite. Une suite $\{a_n\}$ possédant un seul point d'accumulation dans $\overline{\mathbf{C}}$ sera dite *convergente vers* a. On note

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{4}$$

Remarque. Il existe une différence entre les notions de point d'accumulation d'une suite $\{a_n\}$ et d'un ensemble de valeurs $\{a_n\}$. Par exemple, la suite $a_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ possède le point d'accumulation $a = 1$, tandis que l'ensemble $\{a_n\}$ qui est composé du seul point $a_n = 1$ n'en possède aucun.

✱ Démontrer les propositions suivantes:

1) une suite $\{a_n\}$ converge vers a si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|a_n - a| < \varepsilon$ (si $a \neq \infty$) ou $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ (si $a = \infty$);

2) un point a est un point d'accumulation d'une suite $\{a_n\}$ si et seulement s'il existe une suite partielle $\{a_{n_k}\}$ convergeant vers a. ✱

L'égalité complexe (4) équivaut généralement à deux égalités réelles. Supposons que $a \neq \infty$. Sans perdre en généralité on peut alors admettre que $a_n \neq \infty$ et poser $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $a = \alpha + i\beta$ (pour le point à l'infini, les notions de partie réelle et partie imaginaire n'ont pas de sens). On montre sans peine que (4) équivaut aux égalités

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \text{ *)}. \tag{5}$$

Lorsque $a \neq 0$, $a \neq \infty$, on peut admettre que $a_n \neq 0$, $a_n \neq \infty$ et poser $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $a = re^{i\varphi}$; alors (4) a lieu si

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi, \tag{6}$$

et réciproquement, si (4) a lieu, alors les relations (6) ont lieu aussi, la deuxième d'entre elles pour un choix convenable des valeurs φ_n **). Si $a = 0$ ou ∞, la relation (4) équivaut à l'une des relations $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ (le comportement de φ_n importe peu dans ce cas).

✱ Prouver les propositions suivantes:

1) la suite $\{e^{in}\}$ diverge;

2) si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $|\operatorname{Arg} a_n| \leqslant \alpha$, où $\alpha < \pi/2$, alors elle converge absolument. ✱

On se servira parfois de la notion de *distance* entre des ensembles. On appelle *distance* entre deux ensembles M et N la borne inférieure des distances de tout couple de points z', z'', $z' \in M$, $z'' \in N$:

$$\rho(M, N) = \inf_{\substack{z' \in M \\ z'' \in N}} \rho(z', z''); \tag{7}$$

au lieu de la métrique sphérique on peut de toute évidence envisager la métrique euclidienne.

Théorème 1. *Si des ensembles fermés M et N de $\overline{\mathbf{C}}$ ont une intersection vide ($M \cap N = \varnothing$), la distance qui les sépare est strictement positive.*

▶ Supposons par absurde que $\rho(M, N) = 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe des suites de points $z'_n \in M$ et $z''_n \in N$

*) Il suffit de se servir de la relation

$$\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) \leqslant |a_n - a| = \\ = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|.$$

**) Si les valeurs φ_n sont arbitrairement choisies, la suite $\{\varphi_n\}$ peut ne pas converger même si $\{a_n\}$ converge.

telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z'_n, z''_n) = 0$. D'après le principe de compacité, les suites $\{z'_n\}$ et $\{z''_n\}$ possèdent des points d'accumulation respectifs z' et z''. De plus, $z' \in M$ et $z'' \in N$, puisque M et N sont fermés. Quitte à passer aux suites partielles, on peut admettre que $z'_n \to z'$, $z''_n \to z''$. L'axiome du triangle pour la métrique sphérique nous donne

$$\rho(z', z'') \leqslant \rho(z', z'_n) + \rho(z'_n, z''_n) + \rho(z''_n, z'').$$

Or le second membre tend vers 0 lorsque $n \to \infty$; donc à la limite $\rho(z', z'') = 0$. Par conséquent, $z' = z''$, ce qui contredit le fait que $M \cap N = \varnothing$. ◀

3. Chemins et courbes. Définition 1. On appelle *chemin* γ une application continue d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de l'axe réel dans $\mathbf{C}$ (ou $\overline{\mathbf{C}}$). Autrement dit, un chemin est une fonction $z = \gamma(t)$ d'une variable réelle t à valeurs complexes, continue en tout point $t_0 \in [\alpha, \beta]$ au sens suivant: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\{t \in [\alpha, \beta] : |t - t_0| < \delta\}$ pour tous les points t duquel on a $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$ (ou $\rho(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \varepsilon$ si $\gamma(t_0) = \infty$). Les points $a = \gamma(\alpha)$ et $b = \gamma(\beta)$ s'appellent *extrémités* du chemin (si $\alpha < \beta$, alors a est l'origine et b est l'extrémité); un chemin est dit *fermé si* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. On dira qu'un chemin $\gamma: [\alpha, \beta] \to \overline{\mathbf{C}}$ *est situé* sur un ensemble M si $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.

On aura intérêt à distinguer dans certaines questions les notions de chemin et de courbe. Pour introduire cette dernière notion on conviendra de dire que deux chemins

$$\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \overline{\mathbf{C}} \text{ et } \gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \overline{\mathbf{C}}$$

sont *équivalents* et on notera $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe une fonction continue strictement croissante

$$\tau : [\alpha_1, \beta_1] \xrightarrow{\text{sur}} [\alpha_2, \beta_2] \tag{1}$$

telle que $\gamma_1(t) = \gamma_2[\tau(t)]$ pour tout $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Il est immédiat de vérifier que cette relation est une relation d'équivalence, i.e. qu'elle est réflexive ($\gamma \sim \gamma$), symétrique ($\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$) et transitive ($\gamma_1 \sim \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$). On dira que le chemin γ_2 se déduit de γ_1 par le changement de paramètre (1).

Exemple. Considérons les chemins $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$; $\gamma_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$; $\gamma_3(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, $\gamma_4(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Dans tous ces cas l'ensemble des valeurs de $\gamma_j(t)$ est l'intervalle $[0, 1]$. Mais seuls γ_1 et γ_2 sont équivalents; les chemins γ_3 et γ_4 ne sont équivalents ni l'un à l'autre, ni à γ_1 et γ_2: leur orien-

tation est différente de celle des deux premiers (fig. 2). Par contre, γ_1 et γ_2 sont équivalents au chemin γ_3^- déduit de γ_3 en inversant son orientation (cf. n° 15).

✱ Indiquer les chemins équivalents:
a) $e^{2\pi it}$, $[0, 1]$; b) $e^{4\pi it}$, $[0, 1]$;
c) $e^{-2\pi it}$, $[0, 1]$; d) $e^{4\pi i \sin t}$, $[0, \pi/6]$. ✱

Définition 2. On appelle *courbe* une classe de chemins équivalents au sens ci-dessus. Si aucune confusion n'est à craindre, on entendra parfois par courbe un ensemble de points $\gamma \subset \overline{\mathbf{C}}$ image de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par une application continue $z = \gamma(t)$.

Dans la suite nous aurons besoin d'imposer des contraintes supplémentaires aux chemins et courbes envisagés. On dira qu'un chemin $\gamma: [\alpha, \beta] \to \overline{\mathbf{C}}$ est un *chemin de Jordan* si l'application γ est continue et bijective. La définition d'un lacet de Jordan est laissée au soin du lecteur.

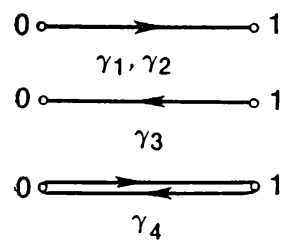

Fig. 2

Un chemin $\gamma: [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ est dit *continûment différentiable* si $\gamma(t)$ admet une dérivée $\gamma'(t)$ continue en tout point $t \in [\alpha, \beta]$ (par dérivée de la fonction $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ en un point $t_0 \in]\alpha, \beta[$ on entend $x'(t_0) + iy'(t_0)$; aux bornes de cet intervalle, la même combinaison des dérivées à gauche et à droite aux bornes respectives). Un chemin continûment différentiable s'appelle *différentiable* si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$: cette condition traduit l'absence de points singuliers. Un chemin est *différentiable par morceaux* si la fonction $\gamma(t)$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ et si $[\alpha, \beta]$ peut être subdivisé en un nombre fini d'intervalles (fermés) tels que la restriction de $\gamma(t)$ à chacun d'eux définisse un chemin différentiable. Un chemin est *rectifiable* *) si $\gamma(t)$ admet presque partout sur $[\alpha, \beta]$ une dérivée $\gamma'(t)$ absolument intégrable-Lebesgue (i.e. existe

$$\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \tag{2}$$

qui est la *longueur* du chemin). Tout chemin différentiable par morceaux est rectifiable.

Dans la suite on se servira des termes en usage pour décrire la différentiabilité des fonctions (et, en particulier, des chemins): une fonction sera dite de classe C^0 si elle est continue, de classe C^1 si

*) On admettra que le lecteur connaît les notions respectives de la théorie de fonctions d'une variable réelle. Dans le cas contraire il peut fort bien se contenter de la classe des chemins différentiables par morceaux.

elle est continûment différentiable et, d'une façon générale, de classe C^n si elle est n fois continûment différentiable.

Exemple. Les chemins γ_1, γ_2 et γ_3 de l'exemple précédent sont des chemins de Jordan, le chemin γ_4 ne l'est pas. Le cercle $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ est un lacet de Jordan (différentiable); la rose à quatre branches $z = \cos 2te^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (fig. 3, *a*) est un lacet (différentiable); la parabole semi-cubique $z = t^2(t + i)$, $t \in [-1, 1]$ (fig. 3, *b*) est un chemin de Jordan (continûment différentiable, différentiable par morceaux). Le chemin $z = t\left(1 + i \sin \frac{1}{t}\right)$, $t \in$

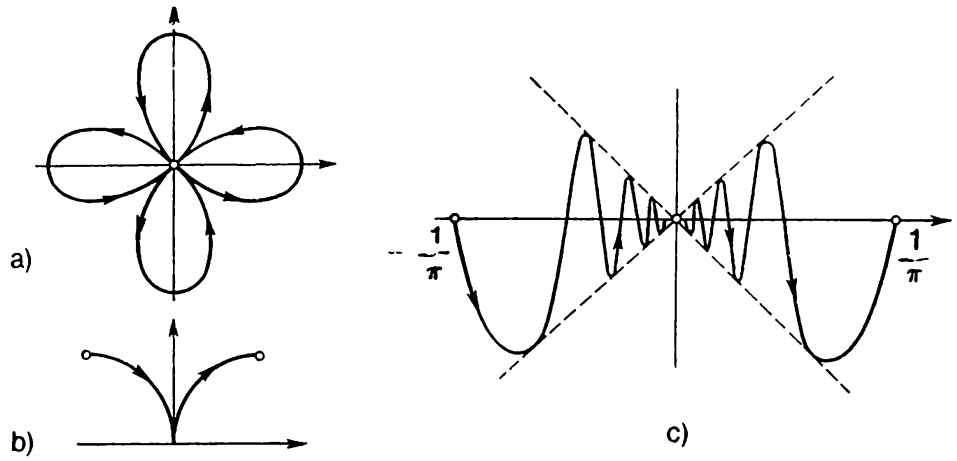

Fig. 3

$\in [-1/\pi, 1/\pi]$ (fig. 3, *c*) est un chemin de Jordan non rectifiable (donc non différentiable par morceaux).

On peut imposer les mêmes contraintes aux courbes. Une *courbe de Jordan* est la classe des chemins équivalents à un chemin de Jordan (les changements de paramètres (1) étant biunivoques, la propriété d'un chemin d'être de Jordan entraîne celle de tous les chemins équivalents).

La définition d'une courbe différentiable implique quelques précisions: nous devons définir cette notion de telle sorte qu'elle ne soit pas violée lorsqu'on passe d'un représentant de cette courbe à un autre, équivalent. Un changement de paramètres (1) continu et strictement croissant étant susceptible de transformer un chemin différentiable en un chemin non différentiable, la notion de différentiabilité n'est pas invariante par de tels changements. Il nous faut donc imposer des conditions supplémentaires à la transformation (1).

Plus exactement, on appellera *courbe différentiable* la classe des chemins obtenus à partir d'un chemin différentiable par tous les changements de paramètre (1), où τ est une fonction continûment dérivable dont la dérivée est > 0. On définira *mutatis mutandis* une

courbe *différentiable par morceaux* et une *courbe rectifiable*. Dans le premier cas on exigera que les changements de paramètres admissibles soient continus et possèdent partout, à l'exception possible d'un nombre fini de points, une dérivée continue et > 0 (et des dérivées à gauche ou à droite aux points exceptionnels). Dans le deuxième cas on exigera que les changements de paramètres soient réalisés par des fonctions strictement croissantes et absolument continues *).

On se servira parfois d'une autre interprétation, géométrique, de la notion de courbe et on comprendra alors par courbe de Jordan, courbe différentiable, courbe différentiable par morceaux ou courbe rectifiable des ensembles de points $\gamma \subset \mathbf{C}$ qui sont les images d'un segment $[\alpha, \beta]$ par des applications $z = \gamma(t)$ définissant respectivement un chemin de Jordan, un chemin différentiable, etc.

4. Domaines. Définition 1. Un *domaine* D est un ensemble de points de $\mathbf{C}$ (ou $\overline{\mathbf{C}}$) possédant les deux propriétés suivantes:

a) pour tout point $a \in D$ il existe un voisinage de a contenu dans D (ouverture);

b) deux points quelconques $a, b \in D$ peuvent être reliés par un chemin d'extrémités a et b, contenu dans D (connexité).

Les points de $\overline{\mathbf{C}}$ qui n'appartiennent pas à D mais qui sont des points d'accumulation de D (i.e. des points dont tout voisinage contient des points de D et au moins un point n'appartenant pas à D) s'appellent *points frontières* de D. L'ensemble des points frontières de D s'appelle *frontière* ou *bord* de D et se note ∂D. La réunion de D et de sa frontière ∂D s'appelle *adhérence* de D et se note $\overline{D}$. Les points de $\overline{\mathbf{C}}$ non contenus dans D et qui ne sont pas des points frontières de D (i.e. les points de l'ensemble $\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{D}$ complémentaire de $\overline{D}$) s'appellent points *extérieurs* à D; chacun de ces points possède un voisinage ne contenant pas de points de D.

Théorème 1. *La frontière ∂D de tout domaine D est un ensemble fermé.*

▶ Soit ζ_0 un point d'accumulation de l'ensemble ∂D; il faut prouver que $\zeta_0 \in \partial D$. Considérons un voisinage pointé U de ζ_0. Le voisinage U contient un point ζ de ∂D. Il existe donc un voisinage V de ζ tel que $V \subset U$. Le voisinage V, donc U, contient des points qui appartiennent et des points qui n'appartiennent pas à D. Ce qui exprime que ζ_0 est un point frontière de D. ◀

*) Nous supposons qu'il est connu qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un chemin soit rectifiable est que la fonction $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ soit à variation bornée (i.e. $x(t)$ et $y(t)$ soient à variation bornée) et que la fonction composée $\gamma[t(\tau)]$, où $\gamma(t)$ est une fonction à variation bornée et $t(\tau)$, une fonction absolument continue, soit aussi une fonction à variation bornée.

Dans la suite nous imposerons parfois des conditions supplémentaires aux frontières des domaines envisagés. Pour les formuler il nous faut d'abord généraliser la notion de connexité introduite plus haut.

Définition 2. On dira qu'un ensemble M est *connexe* si on ne peut le diviser en deux parties non vides M_1 et M_2 telles que les intersections $\overline{M}_1 \cap M_2$ et $M_1 \cap \overline{M}_2$ soient vides. En particulier, un ensemble fermé est dit connexe si on ne peut le partager en deux sous-ensembles disjoints fermés (et non vides). Un ensemble connexe fermé est un *continu*.

La propriété d'un ensemble exprimée par la condition b) de la définition 1 (la possibilité de relier deux points quelconques d'un ensemble par un chemin contenu tout entier dans cet ensemble) s'appelle *connexité par arcs*. On démontre que tout ensemble connexe par arcs est connexe, mais la réciproque est généralement fausse. Toutefois ces notions sont confondues dans le cas d'ensembles ouverts.

Soit M un ensemble non connexe. Les plus grandes parties connexes de M (i.e. les parties qui ne sont strictement contenues dans aucune autre partie connexe de M) s'appellent *composantes connexes* de M. On démontre que tout ensemble est la réunion de ses composantes connexes (en nombre fini ou infini) *).

On dit qu'un domaine $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ est *simplement connexe* si son bord ∂D est un ensemble connexe, et *multiplement connexe* dans le cas contraire. S'il est fini, le nombre de composantes connexes de ∂D, s'appelle *ordre de connexité* de D ; si ces composantes sont en nombre infini, le domaine D est *infiniment connexe*.

Exemple. L'ensemble de la figure 4, *a* qui est l'intérieur d'une lemniscate n'est pas un domaine, car il n'est pas connexe (mais son adhérence est connexe). L'ensemble des points situés entre les cercles tangents de la fig. 4, *b* est un domaine simplement connexe (sa frontière est un ensemble connexe). La figure 4, *c* représente un domaine quadruplement connexe (sa frontière est constituée de quatre composantes connexes: un cercle, un cercle avec un segment et deux points). Le domaine de la figure 4, *d* qui représente le carré $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ privé des segments $\{x = 1/2^n, 1/3 \leqslant y \leqslant 2/3\}$, $n = 1, 2, \ldots$, est infiniment connexe.

On introduira parfois des conditions d'une autre nature. On dira qu'un domaine D est *de Jordan* si sa frontière ∂D est constituée de courbes de Jordan fermées (dans l'interprétation géométrique de cette notion). Un domaine D est *compact*• s'il est contenu dans un

*) Voir F. Hausdorff *Mengenlehre*. Berlin-Leipzig, 1928.

• Il aurait mieux valu dire "borné" ou "relativement compact".

disque $\{|z| < R,\ R < \infty\}$. On dira qu'un ensemble M *appartient proprement* à un domaine D si son adhérence $\overline{M}$ (pour la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$, i.e. compte tenu non seulement des points finis mais aussi d'un point d'accumulation infini de M s'il existe) appartient à D.

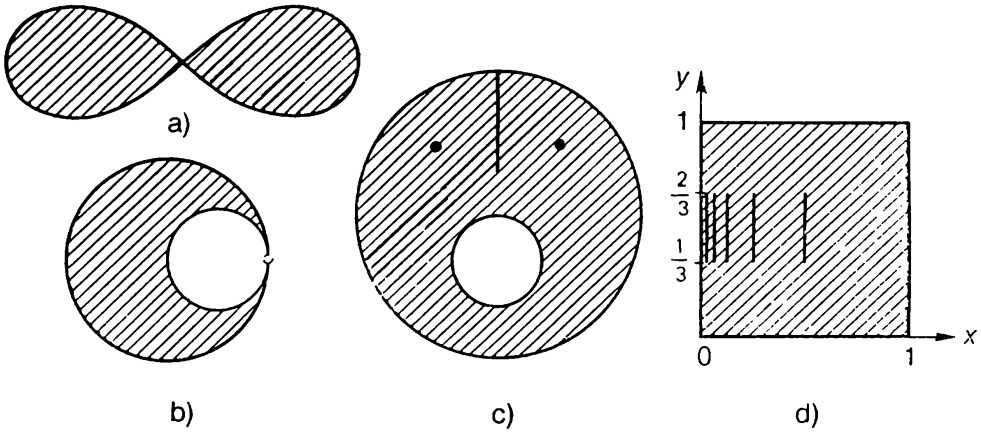

Fig. 4

Exemple. Le rectangle $G_1 = \{|x| < 1,\ |y| < 1/2\}$ appartient proprement à la bande $D = \{|y| < 1\}$; la bande deux fois plus étroite $G_2 = \{|y| < 1/2\}$, appartient à D mais pas proprement.

L'appartenance propre sera désignée par le symbole $\Subset$ (de sorte que $M \Subset D$ si $\overline{M} \subset D$). Dire qu'un domaine D est compact revient à dire que $D \Subset \mathbf{C}$.

Dans la suite on se servira souvent du

Théorème 2. *Soient $M \subset \overline{\mathbf{C}}$ un ensemble connexe et N une partie non vide de M. Si N est à la fois fermé et ouvert pour la topologie relative *) de M, alors $M = N$.*

▶ Supposons par absurde que l'ensemble $N' = M \setminus N$ n'est pas vide. L'adhérence $\overline{N}$ pour la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$ est alors visiblement composée des points de l'adhérence $(\overline{N})_M$ pour la topologie de M et des points d'un ensemble (éventuellement vide) n'appartenant pas à M. Donc $\overline{N} \cap N' = (\overline{N})_M \cap N'$ et puisque N est fermé pour la topologie de M, alors $(\overline{N})_M = N$ et par suite $\overline{N} \cap N' = N \cap N'$ est vide.

Mais puisque N est ouvert aussi pour la topologie de M, son complémentaire N' est fermé pour cette topologie (les points d'accumulation de N' ne peuvent pas appartenir à N, car celui-ci est ouvert, donc ils appartiennent à N'). On peut par conséquent appliquer à

*) On appelle topologie relative d'un ensemble $M \subset \overline{\mathbf{C}}$ une topologie pour laquelle les voisinages des points sont les intersections avec M des voisinages de ces mêmes points pour la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$.

l'intersection $\overline{N}' \cap N$ les mêmes raisonnements qu'à $\overline{N} \cap N'$, donc $\overline{N}' \cap N$ est vide. Ce qui contredit la définition de la connexité de M. ◀

§ 2. Fonctions d'une variable complexe

5. Notion de fonction. Définition 1. On dit qu'une *fonction* f est définie sur un ensemble $M \subset \overline{\mathbf{C}}$ si est donnée une loi qui à chaque point $z \in M$ associe un nombre complexe w (fini ou infini):

$$f: M \to \overline{\mathbf{C}} \text{ ou } w = f(z). \tag{1}$$

D'après cette définition toute fonction est univoque (la notion de fonction multivoque sera introduite au chap. III). On exigera parfois que les fonctions soient biunivoques. On dit qu'une fonction $f: M \to \overline{\mathbf{C}}$ est *biunivoque* ou *injective* si elle transforme des points distincts de M en des points distincts de $\mathbf{C}$, autrement dit, si, z_1 et z_2 étant des points de M, l'égalité $f(z_1) = f(z_2)$ entraîne l'égalité $z_1 = z_2$.

La donnée de $f: M \to \mathbf{C}$ équivaut à celle de deux fonctions réelles

$$u = u(z), \quad v = v(z), \tag{2}$$

où $u: M \to \mathbf{R}$ et $v: M \to \mathbf{R}$ (on admet que $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$). Si de plus $f \neq 0$ et $f \neq \infty$ *), et si l'on admet que $f(z) = \rho e^{i\psi}$, on peut représenter cette fonction par les deux relations suivantes:

$$\rho = \rho(z), \ \psi = \psi(z) + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots), \tag{3}$$

(aux points où la fonction f est nulle ou infinie il en est de même de ρ, quant à ψ, elle n'est pas définie).

On se servira constamment de l'interprétation géométrique de la notion de fonction. La donnée (2) nous suggère de représenter f par deux surfaces gauches $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$; mais ce procédé présente l'inconvénient de ne pas illustrer le fait que le couple (u, v) est un nombre complexe. On se bornera donc à interpréter la fonction $f: M \to \overline{\mathbf{C}}$ comme une application de M dans la sphère $\overline{\mathbf{C}}$.

Pour rendre cette interprétation plus suggestive, on dessinera les ensembles qui se correspondent par l'application envisagée. On représentera le plus souvent les lignes de coordonnées (les systèmes de coordonnées cartésien ou polaire) et leurs images dans les plans z et w. En affectant des indices numériques à ces ensembles, on obtiendra une assez bonne représentation géométrique de la fonction étudiée dans les cas simples.

*) On adoptera cette écriture lorsque $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ pour tout $z \in M$.

Exemple. Soit la fonction

$$w = z^2 \tag{4}$$

dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Cette fonction est commode à représenter dans un système de coordonnées polaires. En posant $z = re^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ et $w = \rho e^{i\psi}$, on peut mettre l'égalité (4) sous la forme des deux égalités suivantes:

$$\rho = r^2, \quad \psi = 2\varphi \tag{5}$$

(cf. règle de multiplication des nombres complexes en coordonnées polaires, n° 1).

Sur (5) on voit que le demi-cercle $\{r = r_0,\ 0 < \varphi < \pi\}$ se transforme par cette application en le cercle pointé $\{\rho = r_0^2,\ 0 < \psi < 2\pi\}$ et la demi-droite $\{0 < r < \infty,\ \varphi = \varphi_0\}$ en la demi-droite $\{0 < \rho < \infty,\ \psi = 2\varphi_0\}$ (fig. 5). Le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ se transforme en le plan w privé du demi-axe positif. Il est commode de représenter un demi-plan par une membrane élastique tendue sur deux demi-axes (le positif et le négatif) articulés en l'origine des coordonnées et sur lesquels elle peut coulisser librement. La transformation (4) peut alors être interprétée comme une déformation de la membrane lorsque les demi-axes viennent en coïncidence.

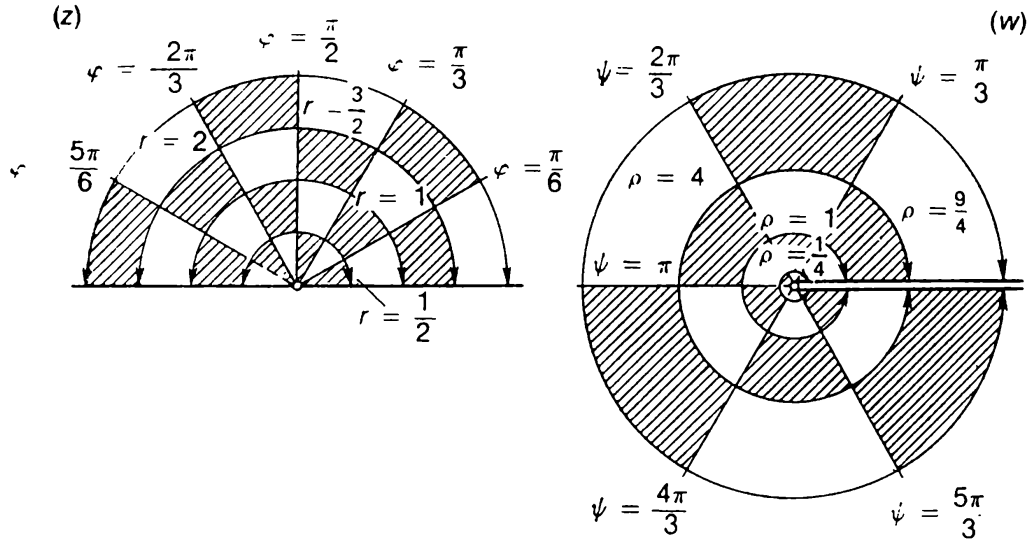

Fig. 5

L'application (4) peut être représentée en coordonnées cartésiennes par deux égalités:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{6}$$

(on pose $z = x + iy$, $w = u + iv$). En faisant $y = y_0$ dans (6), on obtient la courbe $u = x^2 - y_0^2$, $v = 2xy_0$ $(x \in \mathbf{R})$ image de la droite $y = y_0$:

cette courbe est la parabole $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$. L'image de la demi-droite $\{x = x_0,\ 0 < y < \infty\}$ est l'arc de parabole

$$u = x_0^2 - y^2,\ v = 2x_0 y\ (y \in \mathbf{R}_+)\ ^{*)}$$

(fig. 6).

Remarque. Nous avons envisagé l'application (4) dans le demi-plan supérieur (bien qu'elle soit définie partout sur $\mathbf{C}$), car elle est

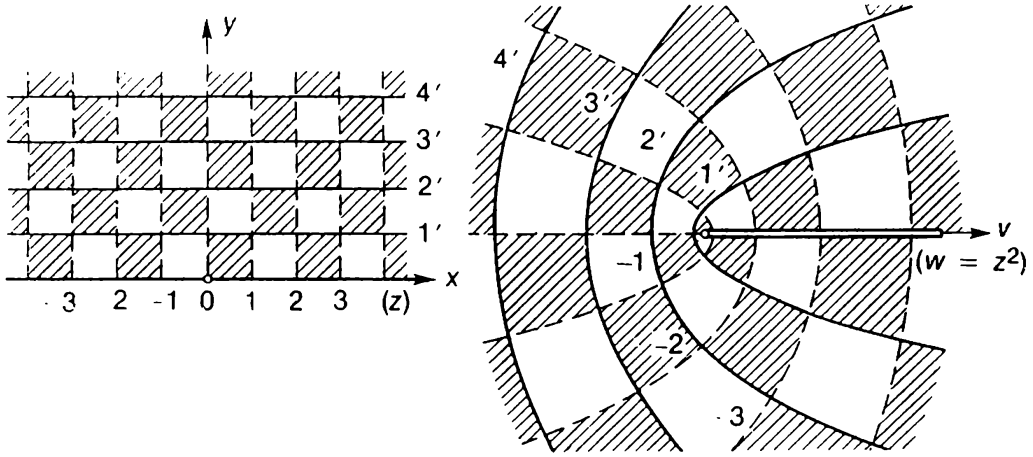

Fig. 6

injective dans ce domaine. L'application (4) n'est pas injective dans le plan tout entier ou dans tout domaine D contenant au moins un couple de points z_0 et $-z_0$ ($z_0 \neq 0$) ayant la même image $w_0 = z_0^2$ et les représentations géométriques ne sont pas aussi suggestives.

On se sert parfois d'un autre procédé de représentation géométrique d'une fonction : le *relief* d'une fonction qui est la représentation géométrique de la surface $\rho = |f(z)|$ dans l'espace (x, y, ρ). Sur ce relief on trace parfois les ensembles de niveau $\arg f = \text{const}$. Dans les cas simples ces ensembles sont des lignes qui, lorsqu'elles forment un réseau assez dense, permettent de se faire une idée de la distribution des valeurs de la fonction f en coordonnées polaires. La figure 7 représente le relief de la fonction $w = \frac{1}{1+z^2}$.

Passons maintenant à la notion fondamentale de limite d'une fonction.

Définition 2. Soit f une fonction définie dans un voisinage pointé d'un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$; on dit qu'un nombre $A \in \overline{\mathbf{C}}$ est la *limite* de la fonction f lorsque z tend vers a, et on note

$$\lim_{z \to a} f(z) = A, \tag{7}$$

*) $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres positifs.

si pour tout voisinage U_A du point A il existe un voisinage pointé U'_a de a tel que pour tout $z \in U'_a$ l'on ait $f(z) \in U_A$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$0 < \rho(z, a) < \delta \tag{8}$$

entraîne

$$\rho(f(z), A) < \varepsilon. \tag{9}$$

Si a, $A \neq \infty$, on peut remplacer (8) et (9) par les inégalités $0 < |z - a| < \delta$ et $|f(z) - A| < \varepsilon$. Si $a = \infty$, $A \neq \infty$, on

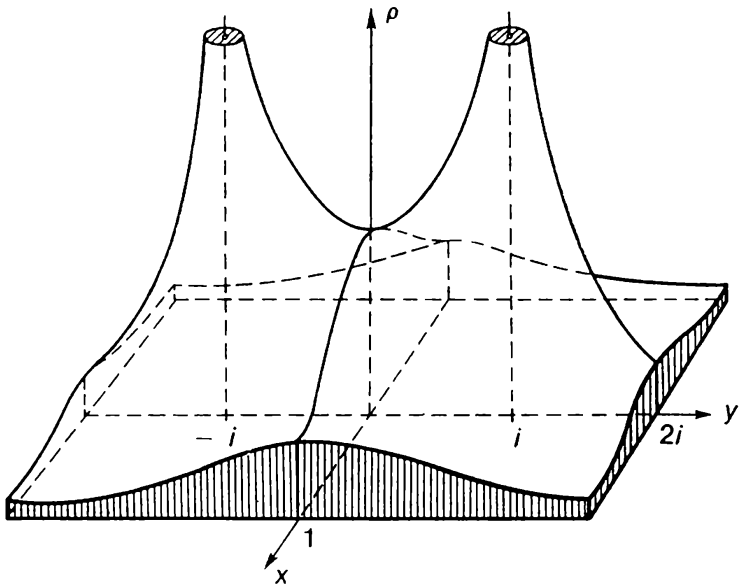

Fig. 7

peut mettre ces inégalités sous la forme $\delta < |z| < \infty$, $|f(z) - A| < \varepsilon$. Les cas $a \neq \infty$, $A = \infty$ et $a = A = \infty$ sont laissés au soin du lecteur.

Pour $A \neq \infty$ posons $f = u + iv$, $A = A_1 + iA_2$ et assurons-nous immédiatement que l'égalité (7) équivaut aux égalités réelles

$$\lim_{z \to a} u(z) = A_1, \quad \lim_{z \to a} v(z) = A_2. \tag{10}$$

En admettant de plus que $A \neq 0$ et en choisissant convenablement les valeurs de Arg f, on peut écrire (7) en coordonnées polaires:

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = |A|, \quad \lim_{z \to a} \operatorname{Arg} f(z) = \operatorname{Arg} A. \tag{10'}$$

Vu que la définition de la limite d'une fonction est similaire au cas réel et que les opérations algébriques sur les nombres complexes obéissent aux mêmes lois que pour les réels, les théorèmes élémen-

taires sur les limites d'une fonction en un point (limite d'une somme, etc.) s'étendent automatiquement aux nombres complexes et nous glisserons donc sur les énoncés et démonstrations.

Dans certains cas on parlera de la limite d'une fonction par rapport à un ensemble. Soient donnés un ensemble M ayant un point d'accumulation a et une fonction f dont l'ensemble de définition contient M. On dira que f tend vers A lorsque z tend vers a par rapport à M, et on écrira

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in M}} f(z) = A, \tag{11}$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in M$ tel que $0 < \rho(z, a) < \delta$ l'on ait $\rho(f(z), A) < \varepsilon$.

Définition 3. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$; on dira que f est *continue au point* a si existe

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a); \tag{12}$$

si $f(a) \neq \infty$, on parlera d'une $\mathbf{C}$-continuité; si $f(a) = \infty$, d'une $\overline{\mathbf{C}}$-continuité (ou d'une continuité généralisée).

Pour les raisons déjà invoquées, les théorèmes élémentaires relatifs aux fonctions continues en un point (continuité d'une somme, etc.) s'étendent *ad litteram* à l'analyse complexe, sous réserve que la continuité soit une $\mathbf{C}$-continuité.

On peut également parler de la continuité en un point a par rapport à un ensemble M si a est un point d'accumulation de M et la limite du premier membre de (12) est une limite par rapport à un ensemble. Une fonction continue en chaque point d'un ensemble M est dite *continue sur* M. En particulier, si f est continue en chaque point d'un domaine D, elle est dite *continue dans* D (dans ce cas elle est continue en chaque point de D au sens de la définition 3, car chaque point z est contenu dans D avec l'un de ses voisinages).

Signalons les propriétés des fonctions $\mathbf{C}$-continues sur des ensembles $\overline{\mathbf{C}}$-fermés $K \subset \overline{\mathbf{C}}$.

1. Toute fonction f continue sur un ensemble K est bornée (i.e. il existe une constante A telle que $|f(z)| \leqslant A$ pour tout $z \in K$).

2. Toute fonction f continue sur un ensemble K atteint ses bornes supérieure et inférieure sur K (i.e. il existe des points $z_1, z_2 \in K$ tels que $|f(z)| \leqslant |f(z_1)|$, $|f(z)| \geqslant |f(z_2)|$ pour tout $z \in K$).

3. Toute fonction f continue sur un ensemble K est uniformément continue (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ pourvu que $z_1, z_2 \in K$ et $\rho(z_1, z_2) < \delta$).

Ces propriétés se prouvant exactement comme dans le cas réel, on glissera sur leur démonstration.

6. Différentiabilité. Cette importante notion étant liée à la linéarité, on commencera par les fonctions linéaires d'une variable complexe.

Définition 1. Une fonction $l: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ s'appelle **R**-*linéaire* ou respectivement **C**-*linéaire* si

a) $l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ et si pour tout $z \in \mathbf{C}$

b) $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ ou respectivement

b') $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Donc les fonctions **R**-linéaires sont linéaires sur le corps **R** des réels, et **C**-linéaires sur le corps **C** des complexes; la condition b') étant plus forte que la condition b), les fonctions **C**-linéaires forment un sous-ensemble des fonctions **R**-linéaires.

Etablissons la forme générale des fonctions **R**-linéaires. En posant $z = x + iy$ et en se servant des propriétés a) et b), on a pour toute fonction l **R**-linéaire: $l(z) = xl(1) + yl(i)$. Posons $l(1) = \alpha$, $l(i) = \beta$ et remarquons que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$; des transformations simples nous conduisent au

Théorème 1. *Toute fonction* **R**-*linéaire est de la forme*

$$l(z) = az + b\bar{z}, \tag{1}$$

où $a = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$ *et* $b = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$ *sont des constantes complexes.*

De façon analogue, de l'égalité $z = 1 \cdot z$ on déduit grâce à la propriété b') le

Théorème 2. *Toute fonction* **C**-*linéaire est de la forme*

$$l(z) = az, \tag{2}$$

où $a = l(1)$ *est une constante complexe.*

Théorème 3. *Pour qu'une fonction* **R**-*linéaire soit* **C**-*linéaire il est nécessaire et suffisant que*

$$l(iz) = il(z). \tag{3}$$

▶ La condition nécessaire est évidente. D'après le théorème 1 on a $l(z) = az + b\bar{z}$, donc $l(iz) = i(az - b\bar{z})$ et $il(z) = i(az + b\bar{z})$; si (3) a lieu, alors $2b\bar{z} = 0$, d'où $b = 0$, i.e. l est une fonction **C**-linéaire. ◀

En posant $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $z = x + iy$ et $w = u + iv$ et en séparant les parties réelles et imaginaires, on peut mettre la fonction **R**-linéaire $w = az + b\bar{z}$ sous la forme

$$u = (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y, \quad v = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y.$$

Donc, géométriquement une fonction **R**-linéaire se ramène à une transformation affine du plan de jacobien

$$J = a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 = |a|^2 - |b|^2. \tag{4}$$

Cette transformation est régulière pour $|a| \neq |b|$; elle envoie droites dans droites, droites parallèles dans droites parallèles et carrés dans parallélogrammes (fig. 8). Elle conserve l'orientation pour $|a| > |b|$ et la modifie pour $|a| < |b|$ *).

Les applications **C**-linéaires $w = az$ ne peuvent modifier l'orientation, car leurs jacobiens $J = |a|^2 \geqslant 0$; elles sont régulières pour

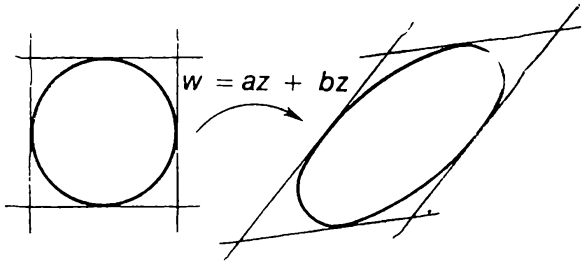

Fig. 8

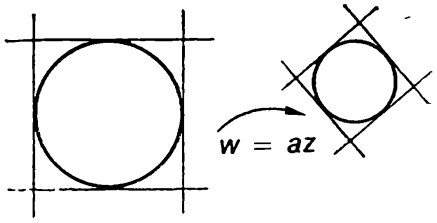

Fig. 9

$a \neq 0$. En posant $a = |a| e^{i\alpha}$ et en se souvenant de la signification géométrique de la multiplication des nombres complexes, on voit que l'application **C**-linéaire régulière

$$w = |a| e^{i\alpha} z \tag{5}$$

se ramène à une homothétie plane de rapport $|a|$ suivie d'une rotation plane d'angle $\alpha = \operatorname{Arg} a$, i.e. à une similitude de rapport a et d'angle $\alpha = \operatorname{Arg} a$ (fig. 9). De telles applications préservent les angles et envoient carrés dans carrés.

Signalons que les applications **C**-linéaires préservent aussi les angles. Plus exactement, on a le

Théorème 4. *Si une application* **R**-*linéaire* $w = az + b\bar{z}$ *préserve l'orientation et les angles de trois vecteurs non colinéaires* $e^{i\alpha_0}$, $e^{i\alpha_1}$ *et* $e^{i\alpha_2}$, *elle est* **C**-*linéaire.*

▶ Sans nuire à la généralité on peut admettre que le vecteur $e^{i\alpha_0}$ et son image sont de même sens que l'axe positif (il suffit pour cela de remplacer z par $ze^{-i\alpha_0}$ et d'en faire autant avec w). A $z = 1$ correspond alors un nombre > 0, donc $a + b > 0$. Pour que l'angle des vecteurs $z = 1$ et $e^{i\alpha_1}$ soit préservé, il faut que $ae^{i\alpha_1} + be^{-i\alpha_1} = h_1 e^{i\alpha_1}$, où $h_1 > 0$, et par suite $a + be^{-2i\alpha_1} > 0$; de façon analogue, $a + be^{-2i\alpha_2} > 0$. Si $b \neq 0$, on obtient, d'après la règle d'addi-

*) On dit qu'une transformation affine régulière conserve l'orientation si elle préserve le sens de parcours des sommets d'un triangle.

tion des vecteurs, trois vecteurs distincts (b, $be^{-2i\alpha_1}$ et $be^{-2i\alpha_2}$) de même longueur $|b|$, de même origine — l'extrémité du vecteur a — et dont les extrémités sont situées sur l'axe réel. Ce qui est impossible, donc $b = 0$. ◀

✱ a) Citer un exemple d'application **R**-linéaire mais non **C**-linéaire qui préserve l'angle de deux directions.

b) Prouver qu'une application **R**-linéaire qui conserve l'orientation et envoie carré dans carré est **C**-linéaire. ✱

Passons à la notion de différentiabilité. Dire qu'une fonction est différentiable revient à dire qu'il est possible de mettre en évidence la partie linéaire principale de son accroissement, ou différentielle. Les deux aspects de la linéarité d'une fonction nous conduisent à deux notions de la différentiabilité.

Définition 2. Fixons un point $z \in \mathbf{C}$ et son voisinage U; on dit qu'une fonction $f: U \to \mathbf{C}$ est **R**-*différentiable* (resp. **C**-*différentiable*) au point z si pour $|\Delta z|$ assez petit son accroissement en ce point se représente sous la forme

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = l(\Delta z) + o(\Delta z), \tag{6}$$

où l est une fonction **R**-*linéaire* (resp. **C**-*linéaire*) à z fixe, et $o(\Delta z)$ un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δz, i.e. $o(\Delta z)/\Delta z \to 0$ lorsque $\Delta z \to 0$. La fonction l s'appelle *différentielle* de f en z et se note df.

L'accroissement d'une fonction **R**-différentiable est donc de la forme

$$\Delta f = a\Delta z + b\overline{\Delta z} + o(\Delta z). \tag{7}$$

En posant $\Delta z = \Delta x$ (de sorte que $\overline{\Delta z} = \Delta x$), en divisant par Δx et en faisant tendre Δx vers 0, on obtient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = a + b.$$

De façon analogue, en posant $\Delta z = i\Delta y$ (de sorte que $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$) et en faisant tendre Δy vers 0, on obtient

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = a - b,$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ces coefficients pour qui l'on a adopté les notations spéciales:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{8}$$

sont parfois appelés *dérivées formelles* de la fonction f en z. C'est Riemann qui le premier les a mis en évidence en 1851 (cf. page 214).

✻ Montrer que

a) $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$;

b) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$; idem pour $\frac{\partial}{\partial z}$. ✻

En se servant des relations évidentes $dz = \Delta z$ et $d\bar{z} = \Delta \bar{z}$ on obtient pour la différentielle d'une fonction **R**-différentiable:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \tag{9}$$

Ainsi est **R**-différentiable en z toute fonction $f = u + iv$, où u et v sont des fonctions des variables réelles x et y possédant des différentielles ordinaires en ce point: cette notion n'apporte rien de fondamentalement nouveau en analyse. L'élément nouveau par contre est la **C**-différentiabilité qui est à proprement parler le point de départ de l'analyse complexe.

L'accroissement d'une fonction f **C**-différentiable est de la forme

$$\Delta f = a\Delta z + o(\Delta z) \tag{10}$$

et sa différentielle est une fonction **C**-linéaire de Δz (à z fixe). On voit sur la formule (9) que les fonctions **C**-différentiables sont des fonctions **R**-différentiables telles que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{11}$$

Si $f = u + iv$, la formule (8) nous donne $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, donc l'égalité complexe (11) peut être écrite sous forme de deux égalités réelles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12}$$

La condition de **C**-différentiabilité d'une fonction est visiblement plus restrictive: s'il est assez difficile de construire des fonctions continues non **R**-différentiables (exemples de Weierstrass ou de Peano), il est par contre aisé de trouver des fonctions élémentaires non **C**-différentiables. Exemple, la fonction $f(z) = x + 2iy$ n'est nulle part **C**-différentiable: elle ne satisfait pas aux conditions (12), puisque $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$.

✱ 1. Montrer que les fonctions **C**-différentiables de la forme $u(x) + iv(y)$ sont nécessairement **C**-linéaires.

2. Montrer que si $f = u + iv$ est une fonction **C**-différentiable sur le plan tout entier et telle que $u = v^2$, alors elle est constante. ✱

Etudions maintenant la notion de dérivée en commençant par la dérivée dans une direction. Fixons un point $z \in \mathbf{C}$, son voisinage U et considérons une fonction $f: U \to \mathbf{C}$. En posant $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, on déduit des formules (7) et (9)

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} |\Delta z| e^{i\theta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} |\Delta z| e^{-i\theta} + o(\Delta z),$$

où $o(\Delta z)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δz. En divisant les deux membres par Δz et en passant à la limite pour $\Delta z \to 0$ et $\operatorname{Arg} \Delta z = \theta =$ const, on obtient la *dérivée de f en z dans la direction* θ:

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \operatorname{Arg} \Delta z = \theta}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}. \tag{13}$$

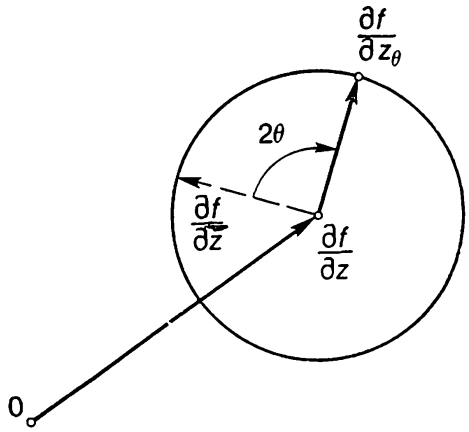

Fig. 10

On voit sur cette formule que si f et z sont fixes et si θ varie de 0 à 2π, le point $\frac{\partial f}{\partial z_\theta}$ parcourt deux fois *) un cercle de centre $\frac{\partial f}{\partial z}$ et de rayon $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|$: l'hodographe des dérivées dans des directions (fig. 10).

Donc si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z_\theta}$ dépend de la direction θ et ce n'est que lorsque $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i.e. lorsque la fonction f est **C**-différentiable en un point z, qu'elle est la même dans toutes les directions.

Il est clair que la *dérivée* de f au point z n'existe que dans ce cas et qu'elle est par définition égale à

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}, \tag{14}$$

où la limite est prise pour la topologie de **C** (c'est-à-dire que les voisinages intervenant dans la définition de la limite sont des dis-

*) Il est évident que les dérivées dans les directions θ et $\theta + \pi$ sont les mêmes.

ques ordinaires et la limite est indépendante de la façon dont Δz tend vers 0). Il est clair aussi que si $f'(z)$ existe, elle est égale à $\frac{\partial f}{\partial z}$. Enonçons et prouvons cette proposition en raison de son importance.

Théorème 5. *Il y a équivalence entre la* **C**-*différentiabilité d'une fonction f en un point z et l'existence de sa dérivée $f'(z)$ en z.*

▶ Si f est **C**-différentiable en z, la formule (10) dans laquelle $a = \frac{\partial f}{\partial z}$ nous donne

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\Delta z) ;$$

puisque $o(\Delta z)/\Delta z \to 0$ avec Δz, il existe $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$. Réciproquement, si $f'(z)$ existe, par définition de la limite on a

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z),$$

où $\alpha(\Delta z) \to 0$ avec Δz. Donc l'accroissement $\Delta f = f'(z)\,\Delta z + \alpha(\Delta z)\,\Delta z$ est composé de deux parties dont la première est **C**-linéaire en Δz et la deuxième, un infiniment petit, ce qui exprime que f est différentiable en z. ◀

La dérivée d'une fonction d'une variable complexe se définit comme en analyse réelle, quant aux opérations arithmétiques et théorèmes sur les limites, ils se généralisent au cas complexe. Donc les opérations élémentaires de dérivation (dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée et réciproque) se généralisent sans changement au cas complexe ; nous glisserons sur leurs énoncés et leurs démonstrations.

Faisons une remarque utile pour les calculs. La dérivée (si elle existe) de la fonction $f = u + iv$ étant indépendante de la direction, on peut la calculer dans la direction de l'axe x ; on obtient alors

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

On constate donc que la notion de **C**-différentiabilité est naturelle. Mais on verra dans la suite que la **C**-différentiabilité en un seul point ne suffit pas pour élaborer une théorie consistante. On exigera donc la **C**-différentiabilité non pas en un seul point mais en tous les points voisins et on conviendra de la définition suivante.

Définition 3. On dit qu'une fonction f est *holomorphe* (ou *analytique*) en un point $z \in \mathbf{C}$ si elle est **C**-différentiable dans un voisinage de ce point.

Exemple. La fonction $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ est visiblement **R**-différentiable en tout point de **C**. Or $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ est nulle seulement pour $z = 0$, donc la fonction $f(z)$ n'est **C**-différentiable qu'au point $z = 0$. Elle ne peut donc être holomorphe en ce point.

L'ensemble des fonctions holomorphes en un point z (chacune de ces fonctions est **C**-différentiable dans son propre voisinage de z) est noté par $\mathcal{O}_z$. Cet ensemble est un anneau, puisqu'il est stable pour la somme et le produit. Signalons que le quotient f/g de deux fonctions de $\mathcal{O}_z$ peut ne pas appartenir à $\mathcal{O}_z$ si $g(z) = 0$.

Les fonctions **C**-différentiables sur un ensemble ouvert $D \subset \mathbf{C}$ seront visiblement holomorphes sur D. On dira que ces fonctions sont *holomorphes sur D* et on désignera l'ensemble de ces fonctions par $\mathcal{O}(D)$. L'ensemble $\mathcal{O}(D)$ est aussi un anneau. Par holomorphie d'une fonction sur un ensemble $M \subset \mathbf{C}$ on comprendra la possibilité de prolonger cette fonction en une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert $D \supset M$.

On dira enfin qu'une fonction f est *holomorphe au point à l'infini* si la fonction $g(z) = f(1/z)$ l'est au point $z = 0$. Cette définition permet d'envisager des fonctions holomorphes sur des ensembles de $\bar{\mathbf{C}}$. Remarquons que la définition de la dérivée à l'infini n'a pas de sens.

L'analyse complexe repose sur la notion de **C**-différentiabilité. Léonard Euler en qui Laplace voyait le maître de tous les mathématiciens de la deuxième moitié du XVIIIe siècle joua un rôle particulier dans la génèse de cette discipline. Arrêtons-nous brièvement sur sa vie et son œuvre.

Euler naquit en 1707 dans la famille d'un modeste pasteur suisse, obtint le grade de maître des arts à l'Université de Bâle (1724), commença à étudier la théologie et s'adonna ensuite aux mathématiques et à leurs applications. En 1727, à l'âge de vingt ans Euler s'expatria à Saint-Pétersbourg où il occupa un poste vacant au département de physiologie à l'Académie des sciences qui venait d'être fondée. Mais c'est aux mathématiques qu'il se consacrera et avec quelle ardeur ! Durant son premier séjour de 14 ans il publia plus de 50 travaux tout en enseignant activement et en dirigeant des travaux pratiques.

Euler s'installa à Berlin de 1741 à 1766 sans perdre contact avec l'Académie de Pétersbourg dans les éditions de laquelle il publia plus de 100 livres et articles. Il retournera ensuite à Saint-Pétersbourg où il restera jusqu'à la fin de ses jours. En dépit d'une cécité quasi totale il prépara près de 400 travaux.

Euler fut le premier à développer l'analyse mathématique dans ces célèbres monographies *Introduction à l'analyse des infiniment pe-*

tits (2 tomes, 1748), *Calcul différentiel* (1755) et *Calcul intégral* (3 tomes, 1768-1770). Il créa le calcul variationnel, la théorie des équations aux dérivées partielles et la géométrie différentielle et obtint des résultats saillants en théorie des nombres.

Parallèlement à ses recherches théoriques Euler mena d'intenses activités pratiques: il participa notamment au tracé des cartes géographiques de la Russie et à l'expertise d'un projet de pont à une travée sur la Néva proposé par I. Koulibine. Il étudia le mouvement des projectiles dans l'air, trouva la charge critique d'une colonne, jeta les bases théoriques du gyroscope. Au nombre de ses travaux *La mécanique ou science du mouvement exposée analytiquement* (2 tomes, 1736), *La nouvelle théorie du calcul de l'orbite lunaire* (1772) et même *Spéculation complète sur la structure et la conduite des navires à l'usage des élèves navigants* (1778).

Dans les monographies d'analyse mentionnées ci-dessus Euler introduit les fonctions élémentaires fondamentales d'une variable complexe, établit un lien entre elles (en particulier, la formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ déjà signalée) et utilise systématiquement les substitutions complexes dans le calcul des intégrales. Dans *Les principes généraux du mouvement d'un fluide* (1755) Euler relie deux expressions $u\,dy - v\,dx$ et $u\,dx + v\,dy$ aux composantes u et v de la vitesse d'écoulement. Suivant d'Alembert, qui publia son travail trois ans plus tôt et qui partit aussi de considérations hydrodynamiques, Euler établit les conditions pour lesquelles ces expressions sont des différentielles exactes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{16}$$

et trouve la forme générale des solutions de ce système:

$$u - iv = \frac{1}{2}\varphi(x+iy) - \frac{i}{2}\psi(x+iy),$$
$$u + iv = \frac{1}{2}\varphi(x-iy) + \frac{i}{2}\psi(x-iy),$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires (au sens d'Euler). Les relations (16) sont en fait des conditions de $\mathbf{C}$-différentiabilité de la fonction $f = u - iv$ et possèdent une signification physique simple (cf. n° suivant).

Euler a établit les conditions de $\mathbf{C}$-différentiabilité ordinaires (12) qui ne diffèrent de (16) que par leurs signes. En 1776 à l'âge de 69 ans il accomplit le travail *Sur les très remarquables intégrations obtenues par le calcul des imaginaires* dans lequel il indique que ces conditions sont des conditions pour lesquelles l'expression $(u + iv) \times (dx + i\,dy)$ est une différentielle exacte; en 1777 il publie les applications de ces conditions à la construction des cartes géographiques (cf. numéro suivant).

C'est donc à Euler qu'on doit la première étude systématique des fonctions d'une variable complexe et leurs applications dans les problèmes d'analyse, d'hydrodynamique et de cartographie.

Mais Euler n'a pas clairement compris le rôle des conditions de **C**-différentiabilité. Un pas décisif fut réalisé 70 ans plus tard dans les travaux de Cauchy mais il faudra encore 30 ans pour qu'elles soient pleinement appréhendées dans les travaux de Riemann (pour plus de détails voir pp. 99 et 214). Les conditions de **C**-différentiabilité

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

s'appellent traditionnellement *conditions de Cauchy — Riemann*, mais historiquement il serait plus juste de les appeler conditions de d'Alembert — Euler.

7. Significations géométrique et hydrodynamique. La différentielle d'une fonction f **R**-différentiable (resp. **C**-différentiable) en un point $z \in \mathbf{C}$ est de la forme

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}, \quad (\text{resp. } \mathrm{d}f=f'(z)\,\mathrm{d}z) \tag{1}$$

(cf. numéro précédent). Le jacobien d'une application étant défini par sa différentielle (i.e. par une transformation affine), d'après la formule (4) du numéro précédent le jacobien d'une fonction f **R**-différentiable (resp. **C**-différentiable) vaut en un point z

$$J_f(z)=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2, \quad (\text{resp. } J_f(z)=|f'(z)|^2). \tag{2}$$

Etablissons directement la formule (2) pour le lecteur initié aux formes différentielles *). Si $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, alors $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$ et le produit extérieur $\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z} = -i\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y + i\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}x = -2i\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$; de façon analogue, $\mathrm{d}f\wedge \mathrm{d}\bar{f} = -2i\,\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v$ si $\mathrm{d}f = \mathrm{d}u + i\,\mathrm{d}v$. Mais en vertu de la formule (1)

$$\mathrm{d}f\wedge \mathrm{d}\bar{f}=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}\right)\wedge\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\,\mathrm{d}\bar{z}+\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\bar{z}}\,\mathrm{d}z\right)=$$
$$=\left(\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

d'où l'on déduit (2), puisque $\mathrm{d}u\wedge \mathrm{d}v = J_f\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$.

Supposons que f est **R**-différentiable dans un voisinage de z et que z n'est pas *point critique* de f, i.e. $J_f(z) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites d'analyse réelle, il s'ensuit de là que f

*) Elles seront abordées plus en détail dans la seconde partie.

est un homéomorphisme local, i.e. il existe un voisinage U de z qui est appliqué de façon biunivoque et bicontinue par f sur un voisinage de $f(z)$. On voit sur la formule (2) que si f est **R**-différentiable, le jacobien J_f peut avoir n'importe quel signe, i.e. f peut aussi bien conserver que changer l'orientation. Si f est **C**-différentiable, ses points critiques sont confondus avec les points en lesquels sa dérivée s'annule et en ses points non critiques elle conserve toujours l'orientation : $J_f(z) = |f'(z)|^2 > 0$.

On dit qu'une application f **R**-différentiable en un point $z \in \mathbf{C}$ est *conforme* en z si la transformation associée à sa différentielle df en z est une similitude. Puisque d'après ce qui a été dit au numéro précédent cette propriété caractérise les applications **C**-linéaires, on est conduit à l'interprétation géométrique suivante de la **C**-différentiabilité :

Il y a équivalence entre la **C**-*différentiabilité d'une application f en un point z tel que $f'(z) \neq 0$ et la conformité de f en ce point.*

Une application $f : D \to \mathbf{C}$ conforme en chaque point z de D s'appelle *application conforme de D*. Cette application est associée à une fonction holomorphe dans D sans points critiques ($f'(z) \neq 0$ quel que soit $z \in D$). En chaque point du domaine D la tangente à une telle application, i.e. sa différentielle, définit une similitude : en particulier, elle conserve les angles. Ces applications font leur première apparition en 1777 dans les travaux d'Euler relatifs à la composition des cartes géographiques de la Russie dont il fut chargé par l'Académie des sciences de Pétersbourg. Euler a qualifié ces applications d'« infinitésimalement semblables », quant au terme d'« application conforme », il fut introduit en 1789 par l'académicien pétersbourgeois S. Schubert qui comprenait par là une application conservant les angles.

Remarque. Si la différentielle d'une application f **R**-différentiable en un point non critique z envoie une figure dans une figure semblable et d'orientation contraire, on dit alors que f est une *application conforme de deuxième espèce* ou encore une *application anti-conforme* en z et la condition d'anti-conformité de f en un point non critique s'écrit $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Une fonction f est dite *anti-holomorphe* en un point z si elle est **R**-différentiable dans un voisinage de z et si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ en tout point de ce voisinage. Il est évident qu'une fonction $f = u + iv$ est anti-holomorphe en un point z si et seulement si la fonction $\bar{f} = u - iv$ est holomorphe en ce point.

Jusqu'ici nous avons étudié les différentielles d'applications. Voyons maintenant comment la conformité d'une application influe sur les propriétés de cette application. Supposons que f est conforme

dans un voisinage U de z et que la dérivée f' est continue dans U *). Considérons un chemin différentiable γ: $I = [0, 1] \to U$ d'origine z (i.e. $\gamma'(t) \neq 0$ et continue pour tout $t \in I$ et $\gamma(0) = z$). Son image $\gamma_* = f \circ \gamma : I \to f(U)$ est aussi un chemin différentiable, car d'après la règle de différentiation d'une fonction composée

$$\gamma_*'(t) = f'[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t), \quad t \in I, \tag{3}$$

et de plus la dérivée f' est par hypothèse continue et non nulle partout dans U.

Géométriquement $\gamma'(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ est le vecteur tangent à γ en $\gamma(t)$ et de plus $|\gamma'(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = ds$ est la différentielle de la longueur d'arc γ en ce point; de façon analogue,

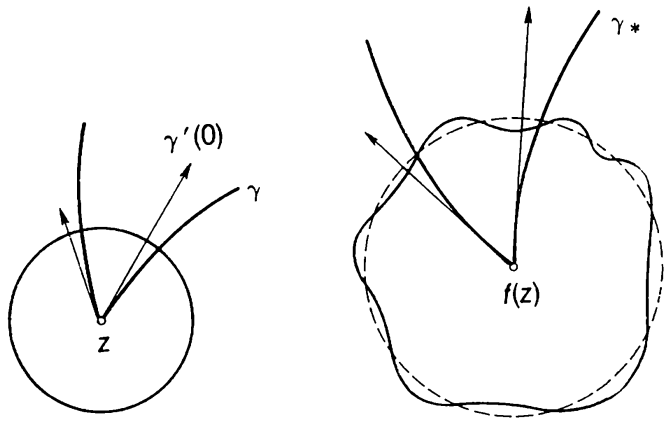

Fig. 11

$|\gamma_*'(t)|\, dt = ds_*$ est la différentielle de la longueur d'arc γ_* au point $\gamma_*(t)$. Donc, la relation (3) entraîne pour $t = 0$

$$|f'(z)| = \frac{|\gamma_*'(0)|}{|\gamma'(0)|} = \frac{ds_*}{ds} \text{ **)}, \tag{4}$$

i.e. le module de la dérivée $f'(z)$ représente le coefficient de dilatation de la longueur d'arc au point z par l'application f.

Le premier membre ne dépend pas ici du choix de γ si $\gamma(0) = z$, donc dans ces conditions tous les arcs subissent la même dilatation au point z. L'application conforme f jouit donc de la *propriété circulaire*: elle envoie les petits cercles de centre z dans des courbes

*) Nous verrons au chap. II que la deuxième condition est automatiquement réalisée: la continuité de f' résulte de son existence en tout point de U. Bien plus, l'existence de f' entraîne l'existence et la continuité sur U des dérivées de f de tout ordre!

**) On sait que pour les arcs différentiables $\frac{ds_*}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s_*}{\Delta s}$, où Δs est la longueur d'arc γ, Δs_* la longueur d'arc γ_*.

différant d'un cercle de centre $f(z)$ d'une quantité infiniment petite (fig. 11).

De la relation (3) pour $t = 0$ il s'ensuit

$$\operatorname{Arg} f'(z) = \operatorname{Arg} \gamma_*'(0) - \operatorname{Arg} \gamma'(0), \tag{5}$$

i.e. l'argument de la dérivée $f'(z)$ représente l'angle de rotation des tangentes aux arcs en z par l'application f.

Le premier membre ne dépend pas non plus du choix de γ si $\gamma(0) = z$, i.e. de tels arcs pivotent d'un même angle. L'application conforme f conserve donc les angles: l'angle de deux arcs *) en un point z est égal à l'angle de leurs images au point $f(z)$ (cf. fig. 11).

Remarque. Si une application f est holomorphe en un point critique z (i.e. $f'(z) = 0$), la propriété circulaire reste valable sous la forme dégénérée: le coefficient de dilatation de tous les arcs est nul en z. La propriété de conservation des angles est mise en défaut: par exemple, l'angle des rayons $\operatorname{Arg} z = \alpha_1$ et $\operatorname{Arg} z = \alpha_2$ au point 0 est doublé par l'application $z \to z^2$! Bien plus, la différentiabilité des arcs peut être mise en défaut en un point critique: par exemple, l'image de la courbe différentiable $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [-1, 1]$ par la même application $z \to z^2$ est la courbe $\gamma_*(t) = t^2(1 - t^2) + 2it^3$ qui présente un point nodal pour $t = 0$ (on s'est servi des formules (6) du n° 5).

✱ Soient u et v des fonctions réelles de x et de y **R**-différentiables, $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ leurs gradients respectifs. Interpréter géométriquement les conditions

$$(\nabla u, \nabla v) = 0, \quad |\nabla u| = |\nabla v|$$

(les parenthèses représentent le produit scalaire) et établir leur lien avec la condition de **C**-différentiabilité de la fonction $f = u + iv$ et la conformité de l'application associée à f. ✱

Voyons maintenant quelle est la signification hydrodynamique de la **C**-différentiabilité et de la dérivée. Considérons un écoulement plan permanent. Cela exprime que les vecteurs vitesses v de cet écoulement ne dépendent pas du temps et sont les mêmes en tout point de chaque perpendiculaire à un plan qui sera pris pour plan de la variable complexe $z = x + iy$ (fig. 12). Le champ de vitesses v est donc un champ de vecteurs plan défini par la formule

$$v = v_1(x, y) + iv_2(x, y). \tag{6}$$

Supposons que les fonctions v_1 et v_2 possèdent des dérivées par-

*) Par angle de deux arcs différentiables se coupant en un point z on comprend l'angle des tangentes à ces arcs en z.

tielles continues dans un voisinage U d'un point z_0. Supposons de plus que dans ce voisinage le champ (6) est *lamellaire* (ou encore *irrotationnel*), i.e.

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \text{ *)}, \tag{7}$$

et *solénoïdal*, i.e.

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

(les égalités (7) et (8) sont valables pour tout point de U).

De la condition (7) il s'ensuit que dans U la forme différentielle $v_1\,dx + v_2\,dy$ est la différentielle exacte d'une fonction φ appelée *potentiel* du champ. Dans U on a donc

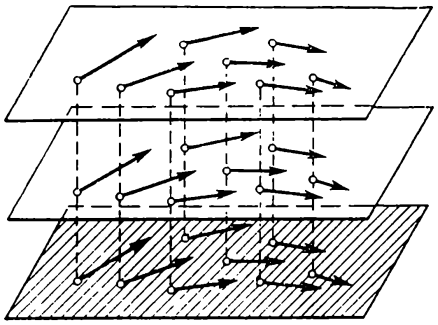

Fig. 12

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{9}$$

ou, en écriture vectorielle, $v = \operatorname{grad} \varphi$.

De la condition (8) il s'ensuit que la forme $-v_2\,dx + v_1\,dy$ est la différentielle exacte d'une fonction ψ, de sorte que dans U on a

$$-v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{10}$$

Sur toute ligne de niveau de la fonction ψ on a $d\psi = -v_2\,dx + v_1\,dy = 0$, i.e. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v_2}{v_1}$, d'où il vient qu'une telle ligne est une *ligne de courant* (une trajectoire des particules du fluide) du champ v. La fonction ψ est pour cette raison appelée *fonction de courant*.

Construisons maintenant la fonction complexe

$$f = \varphi + i\psi \tag{11}$$

qui s'appelle *potentiel complexe* du champ. En comparant les relations (9) et (10) on voit que dans U

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{12}$$

Ces conditions sont confondues avec les conditions de C-différentiabilité (12) du n° 6, donc elles expriment que le potentiel complexe f est une fonction holomorphe en z_0.

Réciproquement, supposons que $f = \varphi + i\psi$ est holomorphe dans un voisinage U de z et que φ et ψ possèdent dans U des dérivées

*) Pour un champ de vecteurs plan on peut admettre que rot v est scalaire; comparer avec la note de la page 11.

secondes continues*). Construisons le champ de vecteurs $v = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sur U. Ce champ est lamellaire sur U, puisque $\operatorname{rot} v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0$, et solénoïdal, puisque $\operatorname{div} v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ (on s'est servi des équations (12)). Le potentiel complexe de ce champ est manifestement la fonction donnée f.

Donc, *dire que la fonction f est holomorphe revient à dire que cette fonction est le potentiel complexe d'un écoulement plan permanent lamellaire et solénoïdal.*

La signification hydrodynamique de la dérivée est immédiate: de (9) et (10) il vient

$$f' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_1 - i v_2, \tag{13}$$

i.e. *la dérivée d'un potentiel complexe est le vecteur conjugué complexe du vecteur vitesse de l'écoulement.* Les points critiques de f sont les points en lesquels la vitesse de l'écoulement est nulle.

Exemple. Trouver le potentiel complexe d'un écoulement de profondeur infinie sur un lit plat, contournant un obstacle de hauteur h perpendiculaire au lit. Cet écoulement peut être assimilé à

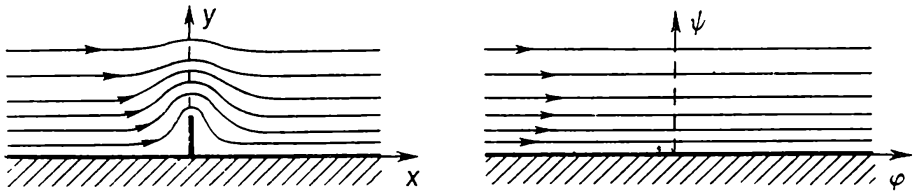

Fig. 13

un écoulement dans le demi-plan supérieur, contournant un segment de longueur h qui, sans perte en généralité, peut être situé sur l'axe imaginaire.

L'écoulement est donc envisagé dans un domaine D dont le bord ∂D est composé de l'axe réel et du segment $[0, ih]$ de l'axe imaginaire (fig. 13). Ce bord doit être une ligne de courant; nous la prendrons pour ligne $\psi = 0$ et admettrons que $\psi > 0$ sur D. Pour trouver le potentiel complexe $\varphi + i\psi$, il suffit par conséquent de trouver une application conforme de D sur le demi-plan supérieur $\{\psi > 0\}$.

On peut obtenir de la manière suivante l'une des fonctions réalisant cette application. L'application $z_1 = z^2$ envoie le domaine D

*) La deuxième condition résulte automatiquement de la première; cf. note de la page 40.

dans le plan muni de la coupure $\operatorname{Re} z_1 \geqslant -h^2$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$ (cf. exemple du n° 5). L'application $z_2 = z_1 + h^2$ envoie cette coupure dans l'axe positif $\operatorname{Re} z_2 \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$. L'image du plan z_2 muni de la coupure $\operatorname{Re} z_2 \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$ par l'application

$$w = \sqrt{z_2} = \sqrt{|z_2|}\, e^{i(\operatorname{Arg} z_2)/2}, \quad 0 < \operatorname{Arg} z_2 < 2\pi,$$

est le demi-plan supérieur. L'application cherchée est la composée

$$w = \sqrt{z^2 + h^2} \tag{14}$$

de ces deux applications.

On obtient l'équation des lignes de courant de cet écoulement en séparant les parties réelle et imaginaire de la relation $(\varphi + i\psi)^2 = (x + iy)^2 + h^2$; pour la ligne $\psi = \psi_0$ on aura

$$y = \psi_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2 + \psi_0^2}} \tag{15}$$

(la correspondance entre les lignes de courant est représentée sur la figure 13). La vitesse $|v| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{|z|}{\sqrt{|z^2 + h^2|}}$ de cet écoulement est égale à 1 à l'infini; le point $z = 0$ est un point critique de cet écoulement. On démontre que la solution générale de ce problème est

$$f(z) = v_\infty \sqrt{z^2 + h^2}, \tag{16}$$

où $v_\infty > 0$ est la vitesse à l'infini. Pour plus de détails sur l'usage des applications conformes en dynamique des fluides cf. par exemple les ouvrages de M. Lavrentiev et B. Chabat *).

§ 3. Propriétés des fonctions homographiques

Passons à l'étude de quelques classes élémentaires de fonctions holomorphes d'une variable complexe.

8. Fonctions homographiques. Elles sont de la forme

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

où a, b, c et d sont des nombres complexes fixes, z une variable complexe; la condition $ad - bc \neq 0$ exclut le cas constant (si $ad - bc = 0$, le numérateur est proportionnel au dénominateur dans (1)). Pour $c = 0$ on a nécessairement $d \neq 0$ et la fonction (1) devient

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = Az + B \tag{2}$$

*) M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, trad. française, Ed. Mir. 1977.

et s'appelle *fonction affine entière*. Pour $A = 0$ cette fonction est constante; pour $A \neq 0$ elle réalise, ainsi qu'il ressort de la formule $w = A\,(z + B/A)$, le produit d'une translation $z \to z + B/A$ par une similitude $z \to Az$, i.e. une application $\mathbf{C}$-linéaire au sens du n° 6.

La fonction (1) est définie pour tout $z \neq -d/c$, ∞ (à condition que $c \neq 0$; pour $c = 0$ elle est définie pour tout z fini). Prolongeons-la aux points exceptionnels en posant $w = \infty$ pour $z = -d/c$ et $w = a/c$ pour $z = \infty$ (pour $c = 0$ il suffit de poser $w = \infty$ pour $z = \infty$). On a maintenant le

Théorème 1. *Toute fonction homographique* (1) *réalise un homéomorphisme* (i.e. une application bijective et continue) *de* $\overline{\mathbf{C}}$ *sur* $\overline{\mathbf{C}}$.

▶ Supposons que $c \neq 0$ (le cas où $c = 0$ est élémentaire). La fonction (1) est définie (de façon unique) sur $\overline{\mathbf{C}}$; la résolution de l'équation (1) par rapport à z nous donne:

$$z = \frac{dw - b}{a - cw}\,; \tag{3}$$

on voit qu'à chaque $w \neq a/c$, ∞ est associé un z bien défini et qu'aux points $w = a/c$ et $w = \infty$ correspondent respectivement les points $z = \infty$ et $z = -d/c$ d'après la convention ci-dessus. Donc la fonction (1) applique bijectivement $\overline{\mathbf{C}}$ sur $\overline{\mathbf{C}}$. Reste à prouver la continuité. La continuité de la fonction (1) est partout évidente sauf pour $z = -d/c$, ∞, où elle résulte de ce que

$$\lim_{z \to \frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\,. \ ◀$$

On se propose maintenant de démontrer que l'application (1) conserve les angles en tout point de $\overline{\mathbf{C}}$. Pour tout point $z \neq -d/c$, ∞ ceci résulte de l'existence de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

en ce point (cf. n° 7). Pour établir cette propriété pour les points exceptionnels (qui sont tous deux liés à l'infini: le premier étant lui-même infini et le second ayant son image à l'infini), il faut introduire la notion d'angle au point à l'infini.

Définition. Par *angle au point* $z = \infty$ de deux chemins γ_1 et γ_2 (passant par ∞ et tels que leurs représentations sphériques présentent une tangente au pôle nord) on comprend l'angle de leurs images Γ_1 et Γ_2 par l'application

$$z \to 1/z = Z \tag{4}$$

au point $Z = 0$.

✱ Aux lecteurs qui ne sont pas satisfaits par cette définition formelle (qui au demeurant est naturelle du point de vue de la théorie des variétés complexes, cf. tome 2), on propose les exercices suivants:

a) Montrer que la projection stéréographique $\mathbf{C} \to S$ (cf. n° 1) conserve les angles, i.e. envoie un couple de droites concourantes de $\mathbf{C}$ dans un couple de cercles de S se coupant sous un même angle.

b) Montrer que la projection stéréographique associe à la transformation $z \to 1/z$ du plan $\overline{\mathbf{C}}$ une rotation de la sphère S autour du diamètre passant par les points $z = \pm 1$ [N o t a. Utiliser la formule (17) du n° 1.] ✱

Théorème 2. *L'application homographique* (1) *est conforme* *) *en tout point de* $\overline{\mathbf{C}}$.

▶ Ce théorème a déjà été prouvé pour les points non exceptionnels. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins passant par le point $z = -d/c$ et s'y coupant sous un angle α (on admet que ces chemins présentent des tangentes en ce point). L'angle de leurs images γ_1^* et γ_2^* par l'application (1) au point $w = \infty$ associé à $z = -d/c$ est par définition égal à l'angle des images Γ_1^* et Γ_2^* de γ_1^* et γ_2^* par l'application $W = 1/w$ au point $W = 0$. Or

$$W = \frac{cz+d}{az+b},$$

donc Γ_1^* et Γ_2^* peuvent être traités comme les images de γ_1 et γ_2 par cette application. L'angle de Γ_1^* et Γ_2^* au point $W = 0$ est égal à α puisque la dérivée

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

existe au point $z = -d/c$ et est différente de 0. Le théorème est prouvé pour le point $z = -d/c$. Pour le prouver pour le point $z = \infty$ il suffit de reprendre le même raisonnement pour la fonction (3) inverse de (1). ◀

On se propose de montrer maintenant que l'ensemble des applications homographiques, ensemble que l'on désignera par Λ, forme un groupe. Soient données deux applications homographiques

$$L_1 : z \to \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$

$$L_2 : z \to \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0.$$

*) Par conformité à l'infini on comprend la propriété de conserver les angles à l'infini.

Appelons *produit* de ces applications l'application composée

$$L : z \to L_1 \circ L_2 (z).$$

L'application L est visiblement homographique :

$$L : w = \frac{az+b}{cz+d}$$

(car la substitution d'une fonction homographique à z dans l'expression de L_1 nous conduit de nouveau à une fonction homographique) et de plus $ad - bc \neq 0$ *) (puisque L envoie $\overline{\mathbf{C}}$ sur $\overline{\mathbf{C}}$ et ne dégénère pas en une constante).

Vérifions les axiomes de groupe.

a) *Associativité* : pour tout triplet d'applications L_1, L_2 et L_3 de Λ on a

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3. \tag{5}$$

En effet, les deux membres de (5) représentent l'application homographique $L_1 \{L_2 [L_3 (z)]\}$.

b) *Existence de l'unité.* L'unité est visiblement l'application identique

$$E : z \to z. \tag{6}$$

c) *Existence de l'élément réciproque* : pour tout $L \in \Lambda$ il existe une application $L^{-1} \in \Lambda$ telle que

$$L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = E. \tag{7}$$

En effet, l'élément réciproque de l'application (1) est l'application (3).

On a ainsi prouvé le

Théorème 3. *L'ensemble Λ des applications homographiques forme un groupe pour la composition des applications.*

---

*) Si l'on introduit des coordonnées homogènes en posant $z = z_1/z_2$ et $w = w_1/w_2$, on peut mettre la transformation (1) sous la forme $w_1 = az_1 + bz_2$, $w_2 = cz_1 + dz_2$, ou, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Pour l'application composée $L = L_1 \circ L_2$, on a

$$ad - bc = (a_1d_1 - b_1c_1)\ (a_2d_2 - b_2c_2),$$

ce qui prouve analytiquement la proposition.

On voit que les applications homographiques sont des transformations projectives de la droite projective complexe $\mathbf{CP}^1$ à laquelle on peut identifier le plan complexe élargi $\overline{\mathbf{C}}$.

Remarque. Le groupe Λ n'est pas commutatif: supposons par exemple que $L_1 : z \to z + 1$, $L_2 : z \to 1/z$; alors $L_1 \circ L_2 : z \to 1/z + 1$ tandis que $L_2 \circ L_1 : z \to 1/(z + 1)$.

Les fonctions affines entières (2) telles que $A \neq 0$ forment un sous-groupe Λ_0 de Λ, le sous-groupe des applications de Λ laissant fixe le point à l'infini.

9. Propriétés géométriques. Citons deux propriétés géométriques élémentaires des applications homographiques. Pour énoncer la première, on conviendra d'appeler *cercle sur* $\overline{\mathbf{C}}$ tout cercle ou toute droite sur le plan complexe (les images de l'un et de l'autre par une projection stéréographique sont des cercles de la sphère de Riemann); les cercles proprement dits seront appelés cercles sur $\mathbf{C}$. On a le

Théorème 1. *Toute application homographique envoie cercle de* $\overline{\mathbf{C}}$ *sur cercle de* $\overline{\mathbf{C}}$ (propriété circulaire des applications homographiques).

▶ Cette assertion est évidente pour les applications linéaires ($c = 0$), car elles se ramènent au produit d'une similitude par une translation. Si $c \neq 0$, cette application peut être mise sous la forme

$$L : z \to \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} = A + \frac{B}{z + C} \tag{1}$$

et être représentée donc par le produit des trois applications:

$$L_1 : z \to A + Bz, \quad L_2 : z \to 1/z, \quad L_3 : z \to z + C$$

($L = L_1 \circ L_2 \circ L_3$). Les applications L_1 (produit d'une similitude et d'une translation) et L_3 (translation) conservent visiblement les cercles sur $\overline{\mathbf{C}}$. Reste à établir cette propriété pour l'application

$$L_2 : z \to 1/z. \tag{2}$$

Pour la prouver *) on remarquera que tout cercle sur $\overline{\mathbf{C}}$ peut être défini par une équation

$$E(x^2 + y^2) + E_1 x + F_2 y + G = 0, \tag{3}$$

où éventuellement $E = 0$ et réciproquement toute équation (3) définit un cercle sur $\overline{\mathbf{C}}$ pouvant éventuellement être réduit à un point ou à un ensemble vide **). En coordonnées complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, i.e. si l'on pose $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

*) On peut la prouver géométriquement en utilisant le fait que la transformation $z \to 1/z$ est une rotation de la sphère de Riemann.

**) Nous excluons le cas $E = F_1 = F_2 = G = 0$.

dans (3), cette équation devient

$$Ez\bar{z} + Fz + \bar{F}\bar{z} + G = 0, \tag{4}$$

où $F = \frac{1}{2}(F_1 - iF_2)$, $\bar{F} = \frac{1}{2}(F_1 + iF_2)$.

Pour trouver l'équation de l'image du cercle (4) par l'application (2), il suffit de poser $z = \frac{1}{w}$ dans (4); on obtient

$$E + F\bar{w} + \bar{F}w + Gw\bar{w} = 0, \tag{5}$$

i.e. une équation de la même forme (4). Les cas de dégénérescence en un point ou en l'ensemble vide sont exclus par la bijectivité des applications homographiques; donc l'image envisagée est un cercle sur $\bar{\mathbf{C}}$. ◀

Nous avons vu plus haut que toute fonction holomorphe f transforme, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, des cercles infiniment petits centrés en un point non critique z_0 en cercles centrés en $f(z_0)$. Le théorème 1 nous dit que les fonctions homographiques transforment exactement tout cercle de $\bar{\mathbf{C}}$ en un cercle. Il est aisé de voir toutefois sur les exemples les plus élémentaires que les centres des cercles ne se correspondent pas en général par ces transformations.

Pour énoncer la deuxième propriété géométrique des applications homographiques, on aura besoin de la

Définition. On dira que des points z et z^* sont *symétriques* par rapport à un cercle $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$ sur $\mathbf{C}$ si

a) ils sont situés sur un même rayon de sommet z_0 de telle sorte que le produit de leurs distances à z_0 soit égal à R^2 ($\operatorname{Arg}(z^* - z_0) = \operatorname{Arg}(z - z_0)$ et $|z - z_0|\,|z^* - z_0| = R^2$), ou, ce qui est équivalent,

b) tout cercle γ de $\bar{\mathbf{C}}$ passant par ces points est orthogonal à Γ.

L'équivalence de ces deux définitions est visible sur la figure 14: si z et z^* sont symétriques par rapport à Γ au sens de la définition a) et γ est un cercle passant par ces points, on sait que le carré de la tangente menée à γ à partir de z_0 (la puissance du point z_0 par rapport à γ) est égal au produit $|z_0 - z^*|\,|z_0 - z|$, i.e. à R^2. Cette tangente est donc un rayon de Γ et ces cercles sont orthogonaux (si γ est une droite, elle passe par z_0 et donc est orthogonale à Γ). Réciproquement, si un cercle γ de $\bar{\mathbf{C}}$ passant par z et z^* est orthogonal à Γ (et, en particulier, la droite zz^*), alors, *primo*, les points z et z^* sont situés sur un rayon de sommet z_0 et, *secundo*, le produit de leurs distances à z_0 est égal à R^2; donc z et z^* sont symétriques par rapport à Γ.

La propriété géométrique b) a l'avantage d'être valable pour les cercles Γ de $\overline{\mathbf{C}}$: si Γ est une droite, on a affaire à une symétrie ordinaire. La définition a) nous conduit à une formule simple reliant des points symétriques: les conditions

$$\operatorname{Arg}(z^* - z_0) = \operatorname{Arg}(z - z_0) \text{ et } |z - z_0|\,|z^* - z_0| = R^2$$

deviennent

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}. \tag{6}$$

Le procédé de construction des points symétriques est évident (cf. fig. 15): si z est intérieur à Γ, il suffit de mener à partir de z une perpendiculaire à z_0z jusqu'à son intersection ζ avec Γ, et de ζ une tangente à Γ jusqu'à son intersection z^* avec z_0z; si z est exté-

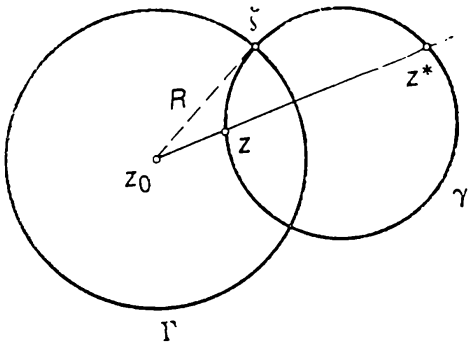

Fig. 14

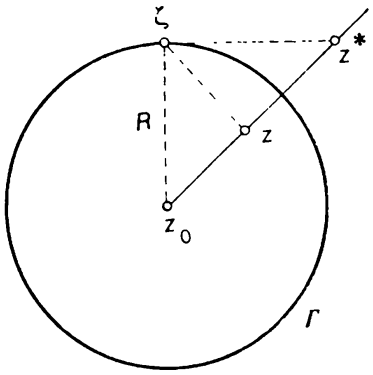

Fig. 15

rieur à Γ, la construction doit être effectuée dans le sens contraire (la démonstration résulte de la similitude des triangles rectangles $z_0z\zeta$ et $z_0\zeta z^*$).

L'application $z \to z^*$ qui à tout point z de $\overline{\mathbf{C}}$ associe le point z^* symétrique par rapport à Γ s'appelle *symétrie* par rapport à Γ ou *inversion*.

Toute inversion par rapport à un cercle de $\overline{\mathbf{C}}$ est, comme le montre (6), associée à une fonction conjuguée complexe d'une fonction homographique. Il s'ensuit d'après le théorème 2 du numéro précédent que *l'inversion est une application anticonforme sur* $\overline{\mathbf{C}}$.

(Cette assertion est évidente dans le cas d'une inversion par rapport à une droite: par une translation et une rotation on transforme cette droite en l'axe réel et l'inversion se ramène alors à l'application $z \to \bar{z}$.)

La propriété annoncée des applications homographiques s'obtient maintenant de façon élémentaire:

Théorème 2. *Toute application homographique L transforme des points z et z^* symétriques par rapport à un cercle Γ de $\overline{\mathbf{C}}$ en des points w et w^* symétriques par rapport à l'image $L(\Gamma)$ de Γ* (propriété de conservation de la symétrie des points).

▶ Considérons le faisceau $\{\gamma\}$ des cercles de $\overline{\mathbf{C}}$ passant par les points z et z^* ; ces cercles sont orthogonaux à Γ. D'après le théorème 1 leurs images $L(\gamma)$ sont aussi des cercles de $\overline{\mathbf{C}}$ qui de plus sont orthogonaux à $L(\Gamma)$ puisque L est conforme. Il s'ensuit que les points w et w^* par lesquels passent les cercles $L(\gamma)$ sont symétriques par rapport à $L(\Gamma)$ *). ◀

10. Isomorphismes et automorphismes homographiques. La formule d'une application homographique

$$L: \ w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

contient quatre coefficients complexes a, b, c et d. Mais en fait cette application ne dépend que de trois paramètres, car le numérateur et le dénominateur de cette fraction peuvent être divisés par l'un des coefficients non nuls. Donc il est naturel qu'une application homographique transforme trois points donnés en trois points. Plus exactement, on a le

Théorème 1. *Pour tout triplet de points $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ distincts et tout triplet de points $w_1, w_2, w_3 \in \mathbf{C}$ distincts, il existe une application homographique L et une seule telle que $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.*

▶ L'existence de l'application L s'établit facilement : construisons des applications homographiques L_1 et L_2 transformant les points z_1, z_2, z_3 et w_1, w_2, w_3 respectivement en les points $0, \infty, 1$ du plan ζ:

$$L_1: \ \zeta = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \quad L_2: \ \zeta = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}; \tag{2}$$

l'application

$$L = L_2^{-1} \circ L_1 \tag{3}$$

qui se détermine comme une fonction $w = w(z)$ à partir de la relation

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}, \tag{4}$$

est l'application cherchée. En effet, elle est homographique et transforme les points z_k en les points w_k ($k = 1, 2, 3$).

*) Remarquons que tout cercle passant par w et w^* et orthogonal à $L(\Gamma)$ est l'image d'un cercle du faisceau $\{\gamma\}$.

Prouvons l'unicité de cette application. Soit λ, $\lambda(z_k) = \omega_k$, ($k = 1, 2, 3$) une application homographique. Considérons l'application $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$, où L_1 et L_2 sont définies à l'aide des formules (2). Il est évident que μ est une application homographique laissant les points 0, ∞ et 1 invariants. De la condition $\mu(\infty) = \infty$ il s'ensuit que μ est une fonction affine entière: $\mu(\zeta) = \alpha\zeta + \beta$; or $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, puisque respectivement $\mu(0) = 0$ et $\mu(1) = 1$. Donc $\mu(\zeta) \equiv \zeta$, i.e. $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = E$, d'où, en vertu des opérations de groupe, $\lambda = L_2^{-1} \circ L_1$ ou, en vertu de (3), $\lambda \equiv L$. ◀

Remarque. Chaque point z_k et w_k figure deux fois dans la relation (4), une fois au numérateur, une fois au dénominateur. Le lecteur peut s'assurer que cette relation reste en vigueur si un point z_k ou/et un point w_k est à l'infini: il faut seulement remplacer par l'unité le numérateur et le dénominateur de la fraction contenant ce point. Par exemple, si $z_1 = w_3 = \infty$, cette formule devient

$$\frac{1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{1} = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{1}{1}.$$

Le théorème 1 est donc valable pour les points d'une surface fermée.

Le théorème prouvé et la propriété circulaire (n° 9) nous permettent d'affirmer que tout cercle Γ de $\bar{\mathbf{C}}$ peut être transformé par une application homographique en un cercle Γ^* (il suffit de trouver les images de trois points de Γ et de se servir de la propriété circulaire). Topologiquement il est clair que le disque B limité par Γ se transforme en l'un des deux disques limités par Γ^* (pour déterminer ce disque, il suffit de trouver l'image d'un point quelconque $z_0 \in B$). D'où l'on déduit sans peine que tout disque $B \subset \bar{\mathbf{C}}$ peut être transformé par une application homographique en un disque B^* de $\bar{\mathbf{C}}$.

Une application homographique d'un domaine D sur un domaine D^* sera appelée *isomorphisme homographique* et les domaines D et D^*, *homographiquement isomorphes.* L'assertion ci-dessus peut s'énoncer comme suit:

Théorème 2. *Tout couple de disques de* $\bar{\mathbf{C}}$ *sont homographiquement isomorphes.*

Trouvons à titre d'exemple tous les isomorphismes homographiques du demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ sur le disque unitaire $\{|w| < 1\}$. L'application du théorème 1 nous conduisant à une formule peu élégante, nous allons procéder d'une autre manière. Fixons le point a, $\operatorname{Im} a > 0$, qui se transforme en le centre $w = 0$ du disque. L'image du point $\bar{a}$ symétrique de a par rapport à l'axe réel est, en vertu du théorème 2 du numéro précédent, le point $w = \infty$ symétrique de $w = 0$ par rapport au cercle $\{|w| = 1\}$. Mais une fonction homographique est définie à un facteur constant

près par les points dont les images sont 0 et ∞ ; donc l'application cherchée doit être de la forme $w = k\,\frac{z-a}{z-\bar{a}}$.

Pour $z = x$, on a $|z - a| = |z - \bar{a}|$; donc pour que l'axe x se transforme en le cercle unitaire, il faut prendre $|k| = 1$, i.e. $k = e^{i\theta}$. Les isomorphismes homographiques du demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ sur le disque unitaire $\{|w| < 1\}$ sont par conséquent définis par la formule

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-a}{z-\bar{a}}\,, \tag{5}$$

où a est un point arbitraire du demi-plan supérieur et θ un nombre réel quelconque.

Les applications (5) dépendent de trois paramètres réels : de θ et des deux coordonnées du point a, image réciproque du centre du

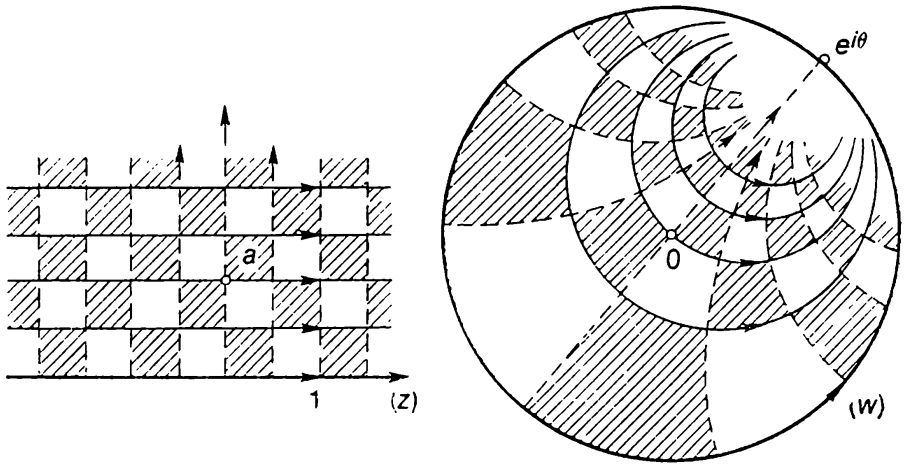

Fig. 16

disque. La signification géométrique de θ est claire : puisque l'image du point $z = \infty$ par l'application (5) est le point $w = e^{i\theta}$, la variation de θ se réduit à une rotation du disque. La figure 16 représente un réseau de coordonnées cartésiennes dans le plan z et son image par l'application (5).

Un isomorphisme homographique d'un domaine sur lui-même s'appelle *automorphisme homographique*. Il est évident que les automorphismes homographiques d'un domaine forment un groupe qui est un sous-groupe du groupe Λ des applications homographiques.

L'ensemble des automorphismes de $\bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ est visiblement confondu avec le groupe Λ. Il est évident aussi que l'ensemble des automorphismes de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est confondu avec le sous-groupe Λ_0 des transformations affines entières $z \to az + b$ $(a \neq 0)$. Déterminons en conclusion le groupe des automorphismes du disque unité.

Fixons l'antécédent a, $|a| < 1$, du centre $w = 0$ du disque. L'image du point $a^* = 1/\bar{a}$ symétrique du point a par rapport au cercle $\{|z| = 1\}$ doit être le point $w = \infty$; l'application cherchée doit donc être de la forme

$$w = k\frac{z-a}{z-1/\bar{a}} = k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

où k et k_1 sont des constantes. Puisque $z = 1$ se transforme en un point du cercle unitaire, on doit avoir $|k_1| \left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = |k_1| = 1$,

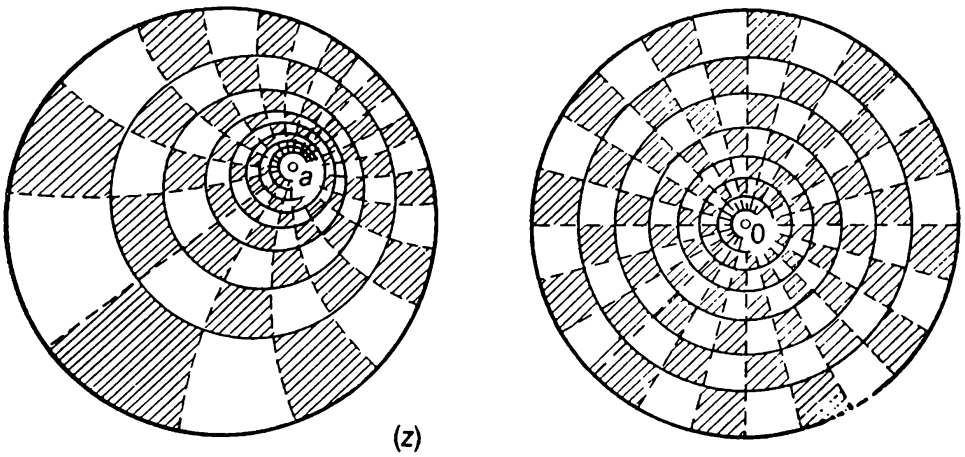

Fig. 17

i.e. $k_1 = e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel. L'application cherchée est donc de la forme

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \tag{6}$$

D'autre part, il est évident que toute fonction de la forme (6), où $|a| < 1$ et θ est un nombre réel, réalise une application homographique du disque unitaire $\{|z| < 1\}$ sur le disque unitaire $\{|w| < 1\}$. La figure 17 représente l'image réciproque du réseau de coordonnées polaires du plan w. Ce réseau est composé de deux familles: d'arcs de cercle passant par les points a et $a^* = 1/\bar{a}$ (image réciproque des rayons) et de cercles par rapport auxquels ces points sont symétriques (image réciproque des cercles).

Nous avons ainsi déterminé le groupe des automorphismes homographiques du disque unitaire. Ce groupe dépend de trois paramètres réels: des deux coordonnées du point a et d'un nombre θ.

✱ Montrer que le groupe des automorphismes homographiques du demi-plan supérieur $H = \{\mathrm{Im}\ z > 0\}$ est composé des applications

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c et d sont des réels tels que $ad - bc > 0$. ✱

11. Un modèle de géométrie de Lobatchevski. En 1882 H. Poincaré a proposé un modèle de géométrie de Lobatchevski basé sur les

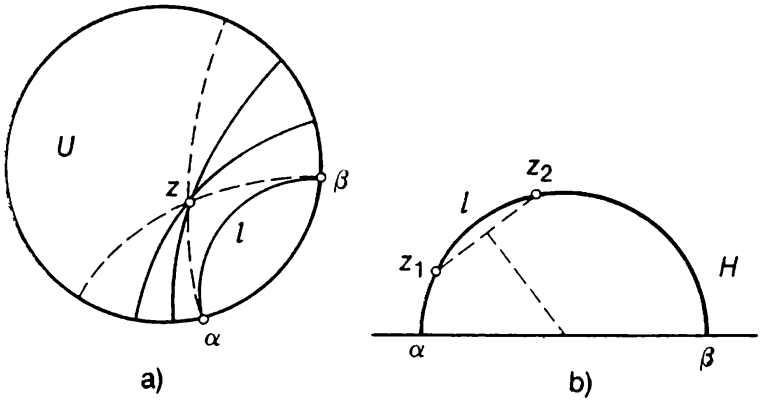

Fig. 18

propriétés des applications homographiques *). Décrivons ce modèle dans ses grandes lignes.

Appelons points de Lobatchevski ou, plus brièvement, Λ-*points* les points du disque unitaire $U = \{|z| < 1\}$, et Λ-*droites*, les arcs de cercle appartenant à $U \subset \overline{\mathbf{C}}$ et orthogonaux à ∂U. Parfois il sera plus commode d'envisager à la place de U le demi-plan supérieur $H = \{\mathrm{Im}\ z > 0\}$ et les Λ-droites seront alors des arcs de cercle orthogonaux à l'axe réel ∂H : le second modèle s'obtient à partir du premier par une application homographique de U sur H (fig. 18).

On démontre de façon élémentaire que par deux Λ-points distincts il passe une Λ-droite et une seule (il est plus avantageux d'utiliser le modèle sur le demi-plan ; cf. fig. 18, *b*) et on vérifie sans peine les autres axiomes de connexion. L'ensemble des Λ-droites est muni naturellement d'un ordre total (cet ordre est confondu avec l'ordre euclidien), il est justiciable de l'axiome de Pasch (toute droite ne passant pas par un sommet d'un triangle et rencontrant un côté rencontre nécessairement un autre côté) : les axiomes d'ordre sont donc confondus avec ceux de la géométrie euclidienne.

Cependant on voit immédiatement (cf. fig. 18, *a*) que l'axiome euclidien de parallélisme est mis en défaut dans nos modèles : par

*) Poincaré fut décoré de la médaille de la société de physique et de mathématiques de Kazan pour ce modèle en 1904.

un Λ-point z extérieur à une Λ-droite l on peut mener une infinité de Λ-droites ne rencontrant pas l. De telles Λ-droites recouvrent tout un secteur limité par les Λ-droites passant par z et tangentes (au sens euclidien) aux points euclidiens de l'intersection de l avec ∂U ou ∂H; ces Λ-droites frontières s'appellent *Λ-parallèles* à l (elles sont représentées en pointillé sur la figure 18, *a*). Donc ces modèles sont justiciables de l'axiome de parallélisme de Lobatchevski.

Sans nous attarder sur la vérification des axiomes des autres groupes (ces axiomes sont tous confondus avec les axiomes euclidiens) indiquons seulement que les *mouvements* dans nos modèles sont des automorphismes homographiques respectivement du disque U ou du demi-plan H. Les mouvements conservent les Λ-droites (propriété circulaire des applications homographiques) ainsi que les angles euclidiens qu'elles font. Ces angles seront par définition pris pour angles de Lobatchevski.

Introduisons maintenant la métrique de Lobatchevski. Remarquons tout d'abord que le birapport des quatre points

$$(z_1,\ z_2;\ \alpha,\ \beta) = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta} : \frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} \tag{1}$$

est aussi invariant par les mouvements (ceci résulte de la formule (4) du numéro précédent). Ce birapport est réel lorsque les quatre points sont situés sur un même cercle euclidien (le birapport étant invariant par toute application homographique, on peut traiter un cercle comme une droite euclidienne, or, cette proposition est évidente pour ce cas). En particulier, il est réel et même > 1 si α et β sont les points d'intersection de la Λ-droite l avec ∂U ou ∂H, et z_1, z_2, des points situés sur l dans l'ordre α, z_1, z_2, β. Puisque deux Λ-points z_1 et z_2 distincts définissent la Λ-droite qui passe par eux, les points α et β sont définis par le choix de z_1 et z_2 et l'on peut écrire

$$(z_1,\ z_2;\ \alpha,\ \beta) = \{z_1,\ z_2\}. \tag{2}$$

Un calcul direct nous montre que si des Λ-points z_1, z_2 et z_3 sont situés sur une même Λ-droite dans l'ordre α, z_1, z_2, z_3, β (α et β représentent toujours les « extrémités » de la Λ-droite), alors $\{z_1,\ z_2\}\cdot\{z_2,\ z_3\} = \{z_1,\ z_3\}$ et par suite

$$\ln\{z_1,\ z_2\} + \ln\{z_2,\ z_3\} = \ln\{z_1,\ z_3\}. \tag{3}$$

Il est donc naturel de prendre pour *distance de Lobatchevski* des Λ-points z_1 et z_2 la quantité $\ln\{z_1,\ z_2\}$ qui est positive (puisque $\{z_1,\ z_2\} > 1$) et invariante par les Λ-mouvements:

$$\rho(z_1,\ z_2) = \ln\{z_1,\ z_2\}. \tag{4}$$

Calculons cette quantité pour le modèle dans le disque U. Si $z_1 = 0$ et $z_2 = r > 0$, alors de toute évidence $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et

d'après la formule (1)

$$\{z_1, z_2\} = (z_1, z_2; -1, 1) = \frac{r+1}{r-1} : \frac{1}{-1} = \frac{1+r}{1-r}.$$

Une rotation par rapport à $z = 0$ étant un Λ-mouvement, on a pour tout $z \in U \setminus \{0\}$

$$\rho_U(0, z) = \ln\{0, z\} = \ln\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{5}$$

Le cas général de Λ-points z_1 et z_2 distincts se ramène à celui-ci par le Λ-mouvement $z \to \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$, donc

$$\rho_U(z_1, z_2) = \ln\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}. \tag{6}$$

De façon analogue, pour le modèle dans le demi-plan supérieur H on a

$$\rho_H(z_1, z_2) = \ln\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\bar{z}_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\bar{z}_2}\right|}. \tag{7}$$

La distance de Lobatchevski satisfait aux axiomes ordinaires:

1) positivité: $\rho(z_1, z_2) \geqslant 0$, l'égalité n'ayant lieu que pour $z_1 = z_2$,

2) symétrie: $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$,

3) inégalité triangulaire: $\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geqslant \rho(z_1, z_3)$. Les deux premiers axiomes sont évidents, quant à l'inégalité triangulaire par exemple dans U, il suffit de la vérifier pour le cas où $z_1 = 0$, $z_2 = a > 0$ et $z_3 = z$ est un point arbitraire (le cas général se ramène à celui-ci par un Λ-mouvement). On a alors

$$\ln\frac{1+a}{1-a} + \ln\frac{1-|z|}{1+|z|} \geqslant \ln\frac{1-\left|\frac{z-a}{1-az}\right|}{1+\left|\frac{z-a}{1-az}\right|}.$$

En chassant les logarithmes et en ajoutant 1 aux deux membres on ramène par des transformations simples cette inégalité à la suivante:

$$\frac{|z|-a}{1-a|z|} \leqslant \left|\frac{z-a}{1-az}\right|. \tag{8}$$

Pour $|z| \leqslant a$, elle est triviale, car son premier membre est $\leqslant 0$. Reste donc à envisager le cas où $|z| > a$. Le premier membre de (8) prend la valeur constante $\lambda = \frac{|z|-a}{1-a|z|}$ sur le cercle $\gamma_1 = \{\zeta : |\zeta| =$

$= z\}$, et puisque (8) se transforme en égalité pour tout z réel $> a$, son second membre prend la même valeur λ sur le cercle $\gamma_2 = \left\{\zeta : \left|\frac{\zeta - a}{1 - a\zeta}\right| = \lambda\right\}$ tangent à γ_1 en $\zeta = |z|$. Le point z est extérieur à γ_2, donc le second membre de (8) est $\geqslant \lambda$ en z et l'inégalité (8) est prouvée.

Si l'un des points z_1, z_2 est fixe et l'autre tend vers ∂U ou ∂H, on voit alors sur les formules (6) et (7) que $\rho(z_1, z_2) \to \infty$. Donc les points de ∂U et ∂H peuvent être traités comme les points à l'infini (les points impropres) du plan de Lobatchevski ; l'ensemble de ces points, i.e. le cercle ∂U ou l'axe réel ∂H, s'appelle l'*absolu*.

En posant $z_1 = z$, en prenant z_2 assez proche de z, i.e. $z_2 = z + dz$, et en mettant en évidence dans $\rho(z_1, z_2)$ la partie ds linéaire par rapport à $|dz|$, on obtient respectivement à partir des mêmes formules (6) et (7)

$$ds_U = \frac{2\,|dz|}{1 - |z|^2}, \quad ds_H = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}. \tag{9}$$

On voit que les différentielles des longueurs d'arcs pour les métriques de Lobatchevski et d'Euclide sont proportionnelles et ceci entraîne, comme on le sait du cours de géométrie, l'identité des angles pour ces métriques. C'est ainsi qu'on justifie la convention adoptée plus haut sur les angles de Lobatchevski.

Citons deux faits de la géométrie élémentaire de Lobatchevski.

1. Aire d'un polygone. Considérons le modèle sur le demi-plan ; l'aire A d'un polygone de Lobatchevski Π est en vertu de la formule (9) égale à

$$A = \int_{\Pi} \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_{\Pi} d\left(\frac{dx}{y}\right)$$

(on s'est servi du fait que d'après la règle de différentiation $d\left(\frac{dx}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2} \wedge dx = \frac{dx \wedge dy}{y^2}$). D'après la formule de Stokes, $A = \int_{\partial\Pi} \frac{dx}{y}$, où $\partial\Pi$, la frontière du polygone, est composée de segments de Λ-droites, i.e. d'arcs de cercles $(x - a_\nu)^2 + y^2 = r_\nu^2$ dont les centres sont situés sur l'axe réel ($\nu = 1, \ldots, n$). Sur le ν-ième côté on peut prendre $\theta_\nu = \operatorname{Arg}(z - a_\nu)$ pour paramètre et alors $x - a_\nu = r_\nu \cos\theta$, $y = r_\nu \sin\theta$ et $dx/y = -d\theta_\nu$. Donc l'intégrale étendue à ce côté est égale à $-\Delta\theta_\nu$ (à l'accroissement sur ce côté du paramètre θ_ν, pris avec le signe contraire) et l'aire A est égale à la somme des $-\Delta\theta_\nu$ sur tous les côtés *). Or

*) Si le ν-ième côté est un segment de droite, on a $dx = 0$ sur ce côté et l'on convient alors que $\Delta\theta_\nu = 0$.

$\Delta\theta_\nu$ est égal à l'angle dont tourne la tangente lorsque le ν-ième côté de Π est parcouru dans le sens positif; au sommet A_ν la tangente tourne d'un angle $\beta_\nu = \pi - \alpha_\nu$, où α_ν est l'angle en A_ν et la tangente tourne au total de 2π lorsque $\partial\Pi$ est parcourue dans le sens positif (fig. 19). Donc $\sum_{\nu=1}^{n} \Delta\theta_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = 2\pi$, d'où l'aire cherchée

$$A = -\sum_{\nu=1}^{n} \Delta\theta_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu - 2\pi = (n-2)\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu. \tag{10}$$

On voit qu'en géométrie de Lobatchevski l'aire d'un polygone ne dépend pas de la longueur de ses côtés et n'est définie que par les angles! En particulier, l'aire d'un triangle de Lobatchevski est égale à $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ *).

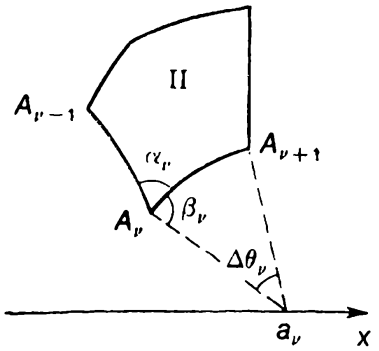

Fig. 19

2. Théorème de Pythagore—Lobatchevski. Utilisons le modèle sur le disque; sans perdre en généralité on peut admettre que le sommet de l'angle droit du triangle se trouve en $z = 0$ et les autres en $z = \alpha$ et $z = i\beta$, $\beta > 0$ (on se ramène à ce cas par un mouvement de Lobatchevski). D'après la formule (6) les Λ-longueurs des côtés et de l'hypothénuse sont respectivement égales à

$$a = \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad b = \ln\frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad c = \ln\frac{1+\left|\dfrac{\alpha-i\beta}{1-i\alpha\beta}\right|}{1-\left|\dfrac{\alpha-i\beta}{1-i\alpha\beta}\right|}.$$

D'où, en vertu d'une formule connue d'analyse pour les fonctions hyperboliques (cf. aussi n° 14 plus bas),

$$\alpha = \operatorname{th}\frac{a}{2}, \quad \beta = \operatorname{th}\frac{b}{2}, \quad \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha^2\beta^2}} = \operatorname{th}\frac{c}{2}. \tag{11}$$

Utilisons maintenant l'expression de ch x en fonction de th $(x/2)$, expression qui est identique à une formule classique de trigonométrie

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}.$$

*) On sait que l'assertion que la somme des angles d'un triangle est égale à π, si les autres axiomes sont satisfaits, est équivalente à l'axiome de parallélisme.

Compte tenu de (11), cette formule nous donne

$$\operatorname{ch} c = \frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

et l'on obtient la relation cherchée $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$.

Signalons que $\operatorname{ch} x \approx 1 + x^2$ pour les petits x, donc si les côtés du Λ-triangle rectangle sont petits, alors $(1 + a^2)(1 + b^2) \approx 1 + c^2$, d'où $a^2 + b^2 \approx c^2$ avec la même précision. Ceci traduit un fait connu : la géométrie de Lobatchevski est localement identique à celle d'Euclide.

Arrêtons-nous encore sur la classification des Λ-mouvements pour le modèle sur le disque, i.e. sur les transformations de la forme

$$\mathrm{L}: z \to e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1. \tag{12}$$

Cette classification est basée sur les points fixes de la transformation (12) qui se déterminent à partir de l'équation $L(z) = z$, i.e.

$$\bar{a}z^2 + 2i \sin\frac{\alpha}{2} \cdot e^{i\alpha/2} z - a e^{i\alpha} = 0 \text{ *)} \tag{13}$$

et qui pour $a \neq 0$ sont égaux à

$$z_{1,2} = \frac{e^{i\alpha/2}}{\bar{a}} \left(i \sin\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{|a|^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \right). \tag{14}$$

Le produit des modules des racines de l'équation (13) étant égal à 1, trois cas peuvent se présenter :

I. Un point fixe, par exemple z_1, est à l'intérieur de U, l'autre, z_2, à l'extérieur ($|a| < \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$). Puisque ici $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$ et $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, les points z_1 et z_2 sont symétriques par rapport à ∂U ; soient $z_1 = z_0$ et $z_2 = z_0^*$. Dans le plan $\zeta = \frac{z-z_0}{z-z_0^*}$ à la transformation (12) est associée une transformation dont les points fixes sont 0 et ∞, i.e. une transformation de la forme $\zeta \to k\zeta$. Mais puisque l'image de ∂U est un cercle centré en $\zeta = 0$, et que ce cercle est invariant par le mouvement, on a $k = e^{i\varphi}$ et notre mouvement est de la forme

$$\frac{w-z_0}{w-z_0^*} = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{z-z_0^*}. \tag{15}$$

Ce mouvement s'appelle Λ-*rotation* autour du Λ-point z_0 ; les trajectoires sont des Λ-cercles de Λ-centre z_0. Ce sont aussi des cercles pour la métrique de Lobatchevski centrés en z_0 et des cercles pour

*) On s'est servi de la relation $e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2} = 2i \sin\frac{\alpha}{2}$.

la métrique euclidienne par rapport auxquels z_0 et z_0^* sont symétriques (cf. fig. 20, *a*). On peut aussi inclure ici le cas $a = 0$ lorsque $z = 0$ et la Λ-rotation est une rotation euclidienne.

II. Deux points fixes distincts $\zeta_{1,2} = e^{i\theta_{1,2}}$ sont sur l'absolu ($|a| > |\sin \alpha/2|$). Le mouvement est alors de la forme

$$\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = h\,\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \tag{16}$$

et de plus la condition de conservation de l'absolu ∂U équivaut à la condition $h > 0$ $\left(\text{une dilatation dans le plan } \zeta = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}\right)$. Ce mouvement qui laisse invariante la Λ-droite qui coupe l'absolu

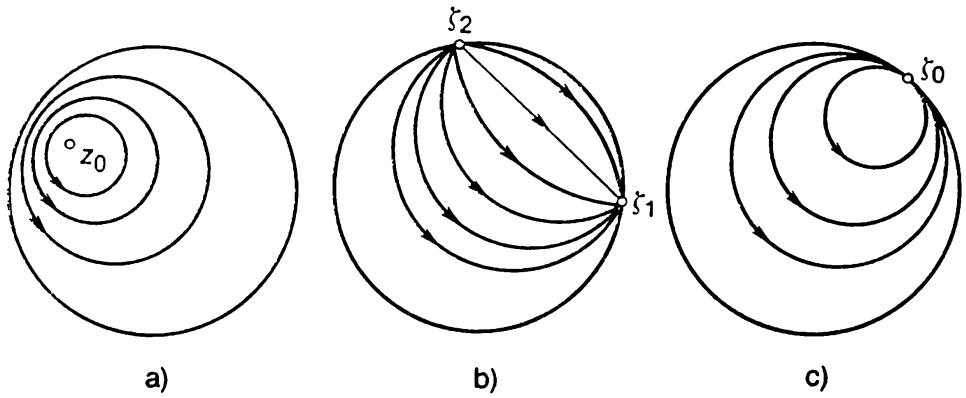

Fig. 20

aux points ζ_1 et ζ_2 s'appelle Λ-*translation* le long de cette Λ-droite. Les trajectoires de ce mouvement s'appellent *équidistantes* (lieux géométriques des points équidistants, pour la métrique de Lobatchevski, de la Λ-droite le long de laquelle a lieu la translation). Les équidistantes comme il est aisé de le voir sont des arcs de cercles euclidiens passant par les points ζ_1 et ζ_2 mais non orthogonaux à ∂U, donc ce ne sont pas des Λ-droites. On les appelle aussi *hypercycles* (cf. fig. 20, *b*).

III. Un point fixe $\zeta_0 = e^{i\theta}$ est sur l'absolu ($|a| = |\sin \alpha/2|$). En passant au plan $\zeta = \frac{1}{z-\zeta_n}$, on s'assure que le mouvement est de la forme

$$\frac{1}{w-\zeta_0} = \frac{1}{z-\zeta_0} + a, \tag{17}$$

où a est un nombre complexe dont l'argument est choisi de telle sorte que l'absolu soit invariant (dans le plan ζ à ce mouvement est associé la translation euclidienne le long de la droite image de l'absolu). On l'appelle *translation limite de Lobatchevski*. Ses trajectoires sont des *horicycles*, i.e. des cercles euclidiens dans U tangents a l'absolu au point fixe ζ_0 (cf. fig. 20, *b*).

§ 4. Fonctions élémentaires

12. Quelques fonctions rationnelles. 1. *Fonction puissance.* La fonction puissance

$$w = z^n, \tag{1}$$

où n est un entier naturel, est holomorphe dans le plan $\mathbf{C}$ tout entier. Sa dérivée $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$, $n > 1$, est non nulle pour tout $z \neq 0$, donc l'application (1) pour $n > 1$ est conforme pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. En représentant (1) en coordonnées polaires $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\varphi}$, soit

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi, \tag{2}$$

on constate que la transformation associée à la fonction (1) augmente de n fois les angles de sommet $z = 0$ et donc n'est pas conforme en ce point (qui est critique).

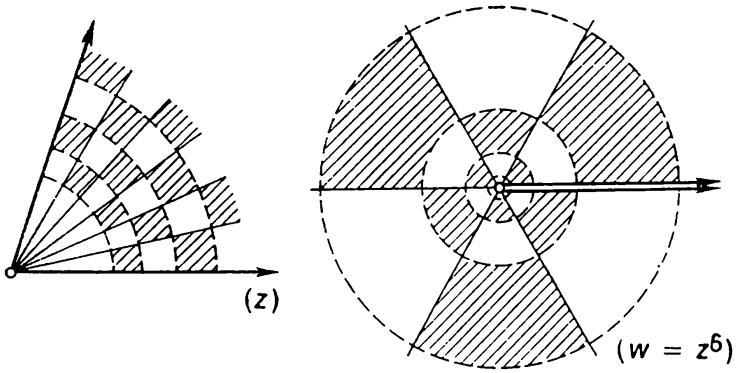

Fig. 21

Sur (2) on voit également que tout couple de points z_1 et z_2 de même module et d'arguments différant d'un multiple de $2\pi/n$, i.e.

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + k\frac{2\pi}{n} \tag{3}$$

(et ces points seulement) admettent la même image w par l'application (1). Donc cette application n'est pas injective pour $n > 1$ dans $\mathbf{C}$. Pour qu'elle le soit dans un domaine $D \subset \mathbf{C}$, il faut et il suffit que D ne contienne aucun couple de points z_1, z_2 distincts liés par les relations (3) *).

Comme exemple de domaine dans lequel l'application (1) est injective, citons le secteur $D = \{0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi/n\}$. L'image de ce secteur par une application homéomorphe est le domaine $D^* = \{0 < \operatorname{Arg} w < 2\pi\}$, i.e. le plan w privé du demi-axe positif. La

*) Le domaine dans lequel l'application (1) est injective pour $n > 1$ ne peut contenir le point $z = 0$, car tout voisinage du point $z = 0$ contient des points distincts liés par les relations (3).

figure 21 nous montre comment se transforment les coordonnées polaires par cette application.

Si l'on rapporte comme précédemment le plan z aux coordonnées polaires $z = re^{i\varphi}$, et le plan w, aux coordonnées cartésiennes $w = u + iv$, l'application (1) se représente par les deux relations suivantes :

$$u = r^n \cos n\varphi, \quad v = r^n \sin n\varphi. \tag{4}$$

La figure 22 représente l'image réciproque des coordonnées cartésiennes du plan w par cette application. Cette image est composée de

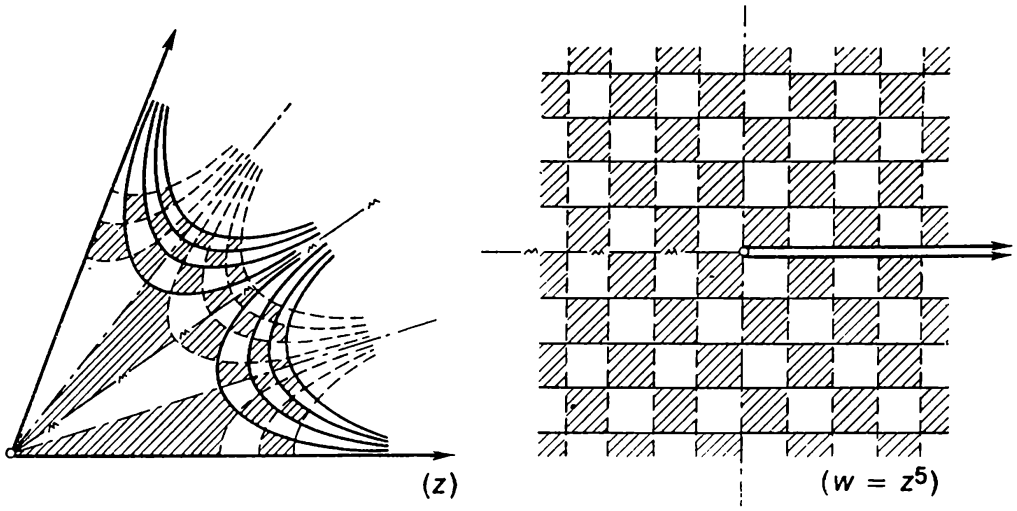

Fig. 22

courbes d'équations polaires $r = \sqrt[n]{u_0/\cos n\varphi}$ (en pointillé), $r = \sqrt[n]{v_0/\sin n\varphi}$ (en traits pleins). Pour $n = 2$, on obtient des hyperboles ordinaires $x^2 - y^2 = u_0$ (en pointillé) et $2xy = v_0$ (en traits pleins). L'application étant conforme, le réseau est orthogonal, i.e. les courbes en pointillé sont orthogonales aux courbes en traits pleins.

2. *Fonction de Joukovski.* C'est ainsi qu'on appelle la fonction rationnelle.

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

holomorphe dans le domaine $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Sa dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

est différente de 0 pour tout $z \neq \pm 1$ de ce domaine. L'application (5) est donc conforme en tout point fini $z \neq 0, \pm 1$. L'image de $z = 0$ est le point $w = \infty$ et la conformité en ce point résulte, en

vertu de la définition de l'angle à l'infini adoptée au n° 6, du fait que la dérivée

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{w}\right)=2\,\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2}$$

est $\neq 0$ pour $z=0$. Aux termes de cette même définition, la conformité de l'application $w=f(z)$ au point $z=\infty$ équivaut à celle de l'application $w=f(1/z)$ au point $z=0$; mais dans le cas de la fonction de Joukovski, $f(z)\equiv f(1/z)$ et l'application (5) est conforme en $z=\infty$ d'après ce qui vient d'être prouvé. On verra plus bas que l'application (5) n'est pas conforme aux points critiques $z=\pm 1$.

Voyons maintenant sous quelles conditions la fonction de Joukovski est injective dans un domaine D. Supposons qu'elle donne la même image de points z_1 et z_2. Alors

$$z_1+\frac{1}{z_1}-\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right)=(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0$$

et $z_1z_2=1$ pour $z_1\neq z_2$. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Joukovski soit injective dans un domaine D est que D ne contienne aucun couple de points z_1, z_2 tels que *)

$$z_1z_2=1. \tag{6}$$

Un exemple d'un tel domaine D est l'extérieur du disque unitaire, i.e. le domaine $D=\{z\in\overline{\mathbf{C}}:|z|>1\}$. Pour représenter l'application (5) de façon suggestive, posons $z=re^{i\varphi}$, $w=u+iv$ et mettons (5) sous la forme

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\qquad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{7}$$

On voit sur ces relations que la fonction de Joukovski transforme le cercle $\{|z|=r_0\}$, $r_0>1$ en ellipses de demi-axes $a_{r_0}=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$ et $b_{r_0}=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)$ et de foyers ± 1 (car $a_{r_0}^2-b_{r_0}^2=1$ pour tout r_0). Ces ellipses sont représentées par des lignes pleines sur la figure 23; lorsque $r_0\to 1$, on a $b_{r_0}\to 1$ et les ellipses se transforment en le segment $[-1,1]\subset\mathbf{R}$; pour r_0 grand, la différence $a_{r_0}-b_{r_0}=1/r_0$ est petite et les ellipses diffèrent peu d'un cercle. Les images des rayons $\{\varphi=\varphi_0,\ 1<r<\infty\}$ sont des portions d'hyperboles $\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1$ de mêmes foyers ± 1 (les lignes en pointillé de la figure 23). L'application étant conforme, la famille de ces hyperboles est orthogonale à la famille d'ellipses décrite plus haut.

*) Le domaine dans lequel la fonction de Joukovski est injective ne peut pas contenir les points ± 1, car tout voisinage de ces points renferme des points distincts liés par la relation (6).

La fonction de Joukovski réalise donc une application conforme et injective de l'extérieur du disque unitaire (y compris le point à l'infini) sur la partie de l'axe réel extérieure au segment $[-1, 1]$.

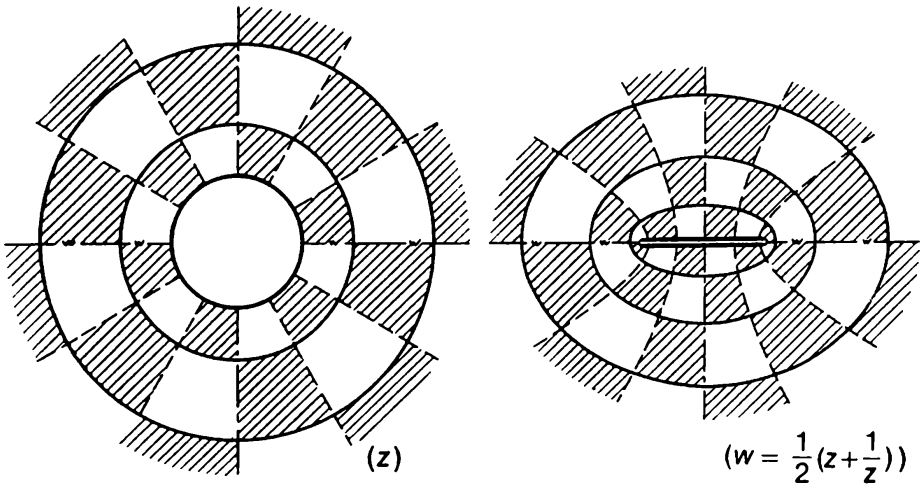

Fig. 23

L'application (5) n'est pas conforme aux points $z = \pm 1$. Le meilleur moyen pour s'en assurer est de la mettre sous la forme

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \tag{8}$$

(on s'assure par un calcul simple de l'identité des formules (8) et (5)). L'application (5) est donc la composée des applications

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \quad \omega = \zeta^2, \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega} \tag{9}$$

(la dernière application est la réciproque de $\frac{w-1}{w+1} = \omega$). La première et la troisième application (9) sont homographiques, donc conformes sur $\overline{\mathbf{C}}$ d'après ce qui a été démontré au n° 8 ; l'application $\omega = \zeta^2$ double les angles aux points $\zeta = 0$ et $\zeta = \infty$ auxquels sont associés les points $z = \pm 1$. Donc la fonction de Joukovski double les angles en ces points.

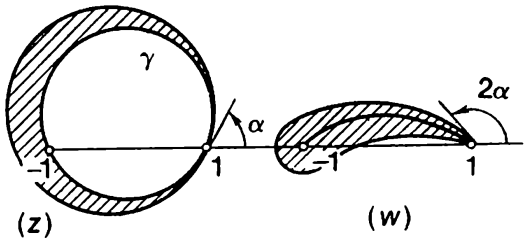

Fig. 24

En se servant de la décomposition (9) le lecteur peut s'assurer que la fonction de Joukovski est une application injective conforme de l'extérieur du cercle γ représenté sur la figure 24 (ce cercle passe par les points ± 1 et fait un angle α en ces points avec l'axe réel)

sur l'extérieur d'un arc de cercle d'extrémités ± 1 faisant au point $w = 1$ un angle de 2α avec l'axe réel *).

On peut s'assurer également que les cercles tangents extérieurement à γ en l'un des points ± 1 se transforment par cette application en courbes fermées présentant une pointe caractéristique rappelant le profil d'une aile d'avion (cf. fig. 24). Cette remarque a permis à N. Joukovski (1847-1921) d'élaborer la première méthode de calcul aérodynamique des ailes.

13. Exponentielle. La fonction e^z se définit par la même limite qu'en analyse réelle:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Montrons que cette limite existe pour tout $z \in \mathbf{C}$; à cet effet, posons $z = x + iy$ et remarquons que d'après les règles d'exponentiation

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \operatorname{Arc\,tg} \frac{y/n}{1+x/n} \text{ **)}.$$

D'où l'on voit qu'existent

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y,$$

donc la limite (1) qui s'écrit sous la forme polaire:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{2}$$

Donc

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Arg} e^z = \operatorname{Im} z. \tag{3}$$

En faisant $x = 0$ dans (2), on obtient la *formule d'Euler*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{4}$$

dont on a fait fréquemment usage. Mais si jusqu'ici on s'est servi du symbole e^{iy} pour abréger la notation du second membre, dorénavant on le comprendra comme la puissance imaginaire du nombre e.

Enumérons les principales propriétés de la fonction exponentielle.

---

*) Le cas $\alpha = \pi/2$ a déjà été traité plus haut par un autre procédé.

**) Pour n assez grand, le point $1 + \frac{z}{n}$ est situé dans le demi-plan de droite et les valeurs de $\operatorname{Arg} 1 + \frac{z}{n}$ et Arc tg sont prises dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

1° *La fonction* e^z *est holomorphe sur le plan* **C**. En effet, en posant $e^z = u + iv$, on déduit de (2) que $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$; les fonctions u et v sont **R**-différentiables sur **C** et les conditions de **C**-différentiabilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$$

sont satisfaites sur **C**.

Donc la fonction (1) est le prolongement holomorphe de la fonction exponentielle réelle e^x de l'axe $\mathbf{R}^1$ au plan **C** tout entier. On montrera plus bas (n° 22) que ce prolongement est unique.

2° *La fonction* e^z *est justiciable de la formule ordinaire de dérivation*. En effet, la dérivée, si elle existe, peut être calculée suivant l'axe x. Donc

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^z. \tag{5}$$

La fonction exponentielle ne s'annule pas, car $|e^z| = e^x > 0$, donc $(e^z)' \neq 0$ et l'application $w = e^z$ est conforme en chaque point de **C**.

3° *La fonction* e^z *est justiciable du théorème ordinaire d'addition*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{6}$$

En effet, en posant $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$ et en se servant des formules d'addition des fonctions trigonométriques et exponentielle réelles, on obtient

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\}.$$

Donc l'addition des nombres complexes z_1 et z_2 se ramène à la multiplication de leurs images e^{z_1} et e^{z_2}. En d'autres termes, la fonction exponentielle e^z transforme le groupe additif du corps des complexes en le groupe multiplicatif de ce même corps:

$$z_1 + z_2 \to e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{7}$$

4° *La fonction* e^z *est périodique de période principale imaginaire* $2\pi i$. En effet, puisque $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, le théorème d'addition nous donne pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

Supposons par ailleurs que $e^{z+T} = e^z$; une multiplication des deux membres par e^{-z} nous donne $e^T = 1$ d'où, en posant $T = T_1 + iT_2$, on obtient $e^{T_1}(\cos T_2 + i \sin T_2) = 1$. Mais alors $e^1 = 1$, i.e. $T_1 = 0$ et $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$, i.e. $T_2 = 2n\pi$, où n est un entier naturel. Donc $T = 2n\pi i$ et $2\pi i$ est bien la période principale.

Ce raisonnement nous montre aussi qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $w = e^z$ soit injective dans un domaine D est que celui-ci ne contienne aucun couple de points liés par la relation

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

La bande $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ est un tel domaine. En posant $z = x + iy$ et $w = \rho e^{i\psi}$, on peut, compte tenu de (3), mettre l'application $w = e^z$ sous la forme

$$\rho = e^x, \quad \psi = y. \tag{9}$$

D'où l'on voit que cette application transforme les droites $\{y = y_0\}$ en rayons $\{\psi = y_0\}$ et les segments $\{x = x_0,\ 0 < y < 2\pi\}$ en

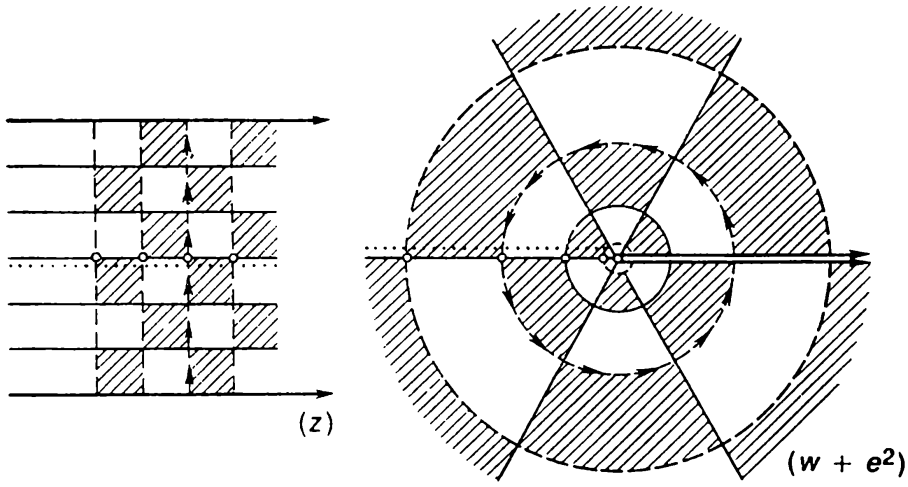

Fig. 25

cercles pointés $\{\rho = e^{x_0},\ 0 < \psi < 2\pi\}$ (fig. 25). La bande $\{0 < y < 2\pi\}$ se transforme donc en le plan w privé de l'axe positif. La bande deux fois plus étroite $\{0 < y < \pi\}$ se transforme, elle, en le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$.

14. Fonctions trigonométriques. D'après la formule d'Euler pour x réel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, d'où

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ces formules peuvent être utilisées pour prolonger de façon holomorphe $\cos z$ et $\sin z$ en posant par définition pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1}$$

(l'holomorphie des seconds membres pour tout $z \in \mathbf{C}$ est évidente).

Toutes les propriétés de ces fonctions découlent de cette définition et des propriétés correspondantes de la fonction exponentielle. Ces fonctions sont toutes deux périodiques, de période principale 2π (la fonction exponentielle est de période $2\pi i$ et les formules (1) contiennent un facteur en z qui est égal à i), le cosinus est une fonction paire, et le sinus, impaire. Ces deux fonctions sont justiciables des formules ordinaires de dérivation

$$(\cos z)' = i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\sin z\,;$$

de même $(\sin z)' = \cos z$. Sont également valables les formules telles que

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

les théorèmes d'addition, etc. ; le lecteur les déduira sans peine des formules (1).

Les fonctions trigonométriques d'une variable complexe sont étroitement liées aux fonctions hyperboliques qui pour tout $z \in \mathbf{C}$ sont définies par les formules ordinaires

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{2}$$

Ce lien s'exprime par les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, \end{aligned} \tag{3}$$

qui s'obtiennent à partir des formules (1) et (2).

Le théorème d'addition et les formules (3) nous donnent

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

d'où

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \tag{4}$$

(on s'est servi des identités $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$). Ces formules permettent de construire le relief du cosinus (cf. fig. 26).

Etudions encore à titre d'exemple la transformation de la demi-bande $D = \{-\pi/2 < x < \pi/2,\ y > 0\}$ par la fonction $w = \sin z$. En représentant cette application comme la composée des applications

$$z_1 = iz, \qquad z_2 = e^{z_1}, \qquad z_3 = \frac{z_2}{i}, \qquad w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)$$

que l'on connaît déjà, on s'aperçoit alors que $w = \sin z$ est une application injective (et conforme) de la demi-bande D sur le demi-

plan supérieur. La figure 27 représente la correspondance des lignes par cette application: les images des rayons $\{x = x_0,\ 0 < y < \infty\}$ sont des portions d'hyperboles du demi-plan supérieur de foyers ± 1, celles des segments $\{-\pi/2 < x < \pi/2,\ y = y_0\}$, des portions d'elli-

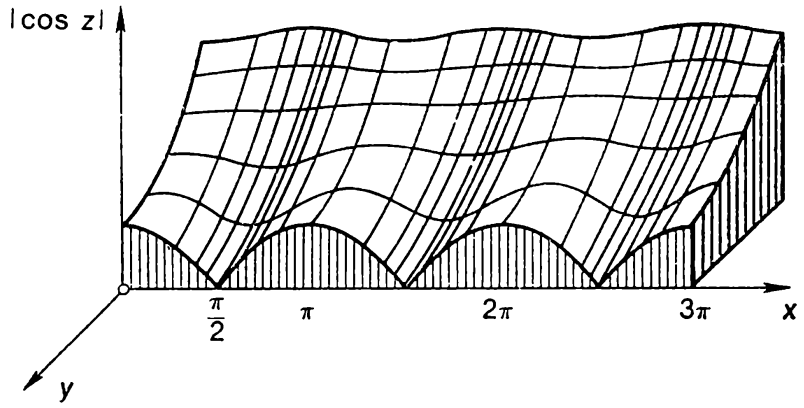

Fig. 26

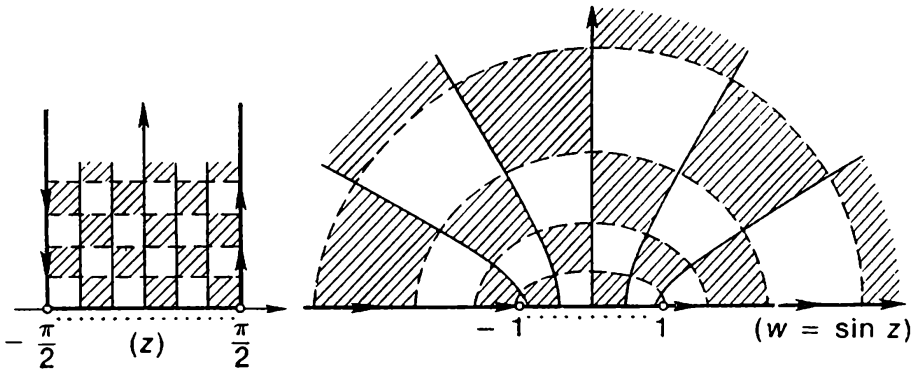

Fig. 27

pses de mêmes foyers. On voit sur cette figure que le sinus prend des valeurs réelles de module > 1 sur les bords verticaux de la demi-bande.

La tangente et la cotangente se définissent à l'aide des formules

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{5}$$

et s'expriment rationnellement en fonction de l'exponentielle:

$$\operatorname{tg} z = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{cotg} z = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{6}$$

Ces fonctions sont holomorphes partout dans $\mathbf{C}$ à l'exception des points en lesquels les dénominateurs des fractions (6) s'annulent (les numérateurs sont différents de zéro en ces points). Déterminons ces points par exemple pour cotg z. On a $\sin z = 0$, i.e. $e^{iz} = e^{-iz}$;

d'où en vertu de la condition (8) du n° 13 on trouve que $2iz = 2in\pi$, $z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ *).

Dans le plan complexe la tangente et la cotangente sont périodiques de période réelle π et sont justiciables des formules usuelles de

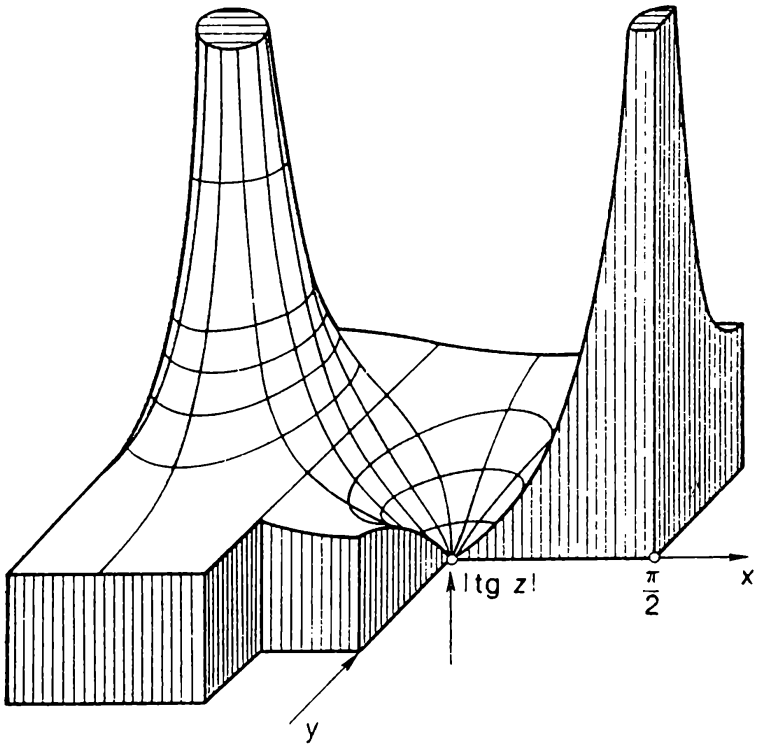

Fig. 28

dérivation et trigonométriques: toutes ces assertions s'obtiennent sans peine à partir des formules (6).

La formule (4) et la formule identique du sinus nous donnent

$$|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}}. \tag{7}$$

La figure 28 représente le relief de la tangente. Ce relief présente des pics nettement prononcés au-dessus des points $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ en lesquels l'holomorphie de la tangente est violée.

Les transformations associées aux fonctions $w = \operatorname{tg} z$ et $w = \operatorname{cotg} z$ sont les composées de transformations déjà connues.

Par exemple, $w = \operatorname{tg} z$ est la composée des applications:

$$z_1 = 2iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = -i\,\frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}.$$

*) Nous avons montré que le prolongement holomorphe du sinus dans le plan complexe ne fait pas apparaître de nouveaux points en lesquels il s'annule.

Cette fonction est une application injective et conforme de la bande $\{-\pi/4 < x < \pi/4\}$ sur l'intérieur du disque unitaire. Elle trans-

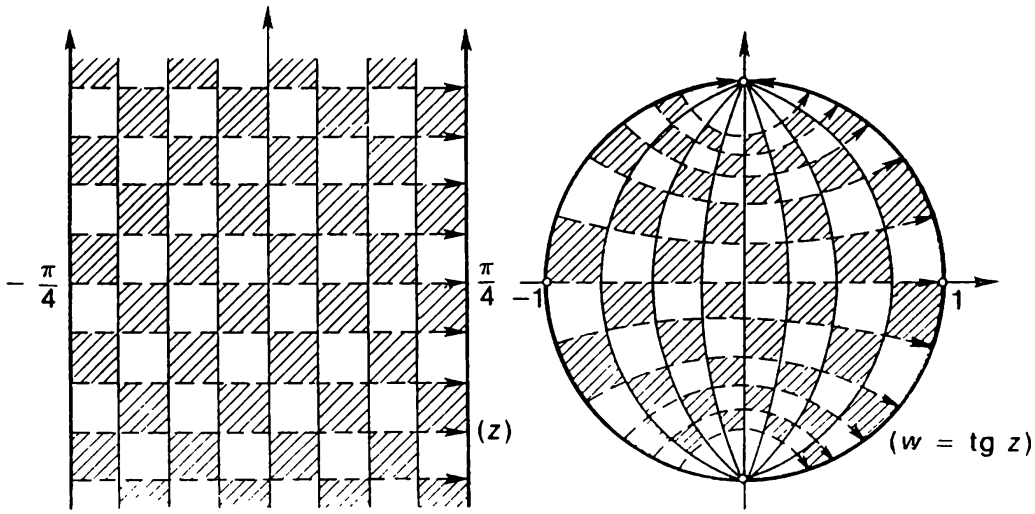

Fig. 29

forme les droites $\{x = x_0\}$ en arcs de cercle passant par les points $\pm i$ et les segments $\{-\pi/4 < x < \pi/4,\ y = y_0\}$ en arcs de cercle par rapport auxquels ces points sont symétriques (fig. 29).

Exercices

1. Soit l'ensemble des vecteurs plans $z = (x, y)$ muni de la manière usuelle de l'addition et de la multiplication par un scalaire (un nombre réel) ; en identifiant les nombres réels aux vecteurs de la forme $(x, 0)$, on peut alors représenter chaque vecteur sous la forme $z = x + iy$, où par définition $i = (0, 1)$. Définissons le produit de deux vecteurs $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ autrement que pour les nombres complexes, plus exactement, posons :

$$z_1 * z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(nous multiplions les binômes $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$ algébriquement en remplaçant i^2 par 1). Appelons un tel système *système* (H) des nombres hyperboliques.

a) Montrer que (H) est une algèbre commutative à diviseurs de zéro et trouver le lieu géométrique de ces diviseurs.

b) Soit $\bar{z} = x - iy$; il est alors naturel d'appeler module de z le nombre $\| z \| = \sqrt{| z * \bar{z} |}$. Trouver le lieu géométrique des points z tels que $\| z \| = 1$. Montrer que lorsqu'on multiplie des nombres complexes hyperboliques, leurs modules se multiplient. Montrer que la condition $\| z \| = 0$ est nécessaire et suffisante pour que z soit diviseur de 0.

c) Pour z_2 tel que $z_2 \neq 0$ et tout z_1 définissons le quotient par la formule

$$z_1 \overset{*}{*} z_2 = \frac{z_1 * \bar{z}_2}{z_2 * \bar{z}_2};$$

Montrer que $(z_1 * z_2) * z_2 = z_1$.

d) Soit $w = f(z) = u + iv$. On appellera dérivée hyperbolique de la fonction $f(z)$ la limite (si elle existe)

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \|\Delta z\| \neq 0}} \Delta w \overset{*}{*} \Delta z.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette dérivée pour les fonctions de classe C^1 dans un domaine est que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

dans ce domaine.

e) Déterminer le relief des applications $w = z * z$ et $w = 1 \overset{*}{*} z$ (une correspondance de réseaux de coordonnées convenablement choisis).

f) Posons par définition $e_*^z = e^x(\operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y)$ et $\sin_* z = \sin x \cos y + i \cos x \sin y$. Comparer ces fonctions à une fonction exponentielle et à un sinus ordinaires et déterminer le relief des applications associées.

2. Montrer que

a) si des points $z_1, \ldots, z_k$ sont situés d'un même côté d'une droite passant par $z = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} z_k \neq 0$;

b) si $\sum_{k=1}^{n} z_k^{-1} = 0$, les points $\{z_k\}$ ne peuvent être situés d'un même côté d'une droite passant par $z = 0$.

3. Etant donné un polynôme $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$, montrer que toutes les racines de la dérivée $P'(z) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (z - a_j)$ appartiennent à l'enveloppe convexe des racines $\{a_k\}$ de $P(z)$.

4. Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de la suite $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, est un cercle.

5. Montrer que pour toute série semi-convergente à termes complexes il existe une droite $l \in \mathbf{C}$ telle que pour tout point $s \in l$ il existe une permutation de cette série convergeant vers s. (Généralisé-

sation du théorème de Riemann sur les séries semi-convergentes à termes réels.)

6. Soit $P(z, \bar{z}) = \sum_{m,n} c_{mn} z^m \bar{z}^n$ un polynôme dont un coefficient $c_{m,n}$ au moins est non nul pour $n \geqslant 1$. Montrer que l'ensemble des points de C-dérivabilité de P n'est nulle part dense dans C.

7. Soit $f = u + iv$ une fonction admettant des dérivées partielles continues au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbf{C}$. Montrer que la condition de C-dérivabilité de f en z_0 peut être mise sous la forme suivante, plus générale que (12) : pour un couple de directions s et n, où n se déduit de s par une rotation de $\pi/2$ dans le sens direct, les dérivées en z_0 suivant ces directions sont liées par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

En particulier, en coordonnées polaires r et θ les conditions de C-dérivabilité s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

8. Le mouvement d'un point z est régi par la loi $z = re^{it}$, où r est une constante et t le temps. Trouver la vitesse du point $w = f(z)$, où la fonction f est holomorphe sur le cercle $\{|z| = r\}$. (*Réponse* : $izf'(z)$.)

9. Soit f une fonction holomorphe sur le disque $\{|z| \leqslant r\}$ telle que $f'(z) \neq 0$ sur le cercle $\gamma = \{|z| = r\}$. Montrer que pour que l'image $f(\gamma)$ soit convexe, il faut que $\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + 1 \geqslant 0$. [Indication : envisager la condition de convexité d'abord sous la forme $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \operatorname{Arg} f'(re^{i\varphi})\right) \geqslant 0$].

10. Trouver la forme générale des applications homographiques associées à une rotation de la sphère de Riemann par rapport à deux points diamétralement opposés.

$\left(\textit{Réponse} : \frac{w-a}{1+\bar{a}w} = e^{i\theta}\frac{z-a}{1+\bar{a}z}\right)$.

11. Lesquelles des propositions suivantes de la géométrie euclidienne sont valables pour la géométrie de Lobatchevski :

a) la bissectrice d'un angle est équidistante de ses côtés;
b) tout triangle est inscriptible;
c) dans tout triangle on peut inscrire un cercle;
d) les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un point;
e) les trois bissectrices d'un triangle se rencontrent en un point.

12. La distance entre deux hypercycles d'extrémités communes est-elle constante ? Même question pour deux horicycles tangents.

13. Soient données une Λ-droite l_0 et une Λ-droite l parallèle à l_0 et passant par un point z situé à une Λ-distance ρ de l_0 ; l'angle α de l et de la perpendiculaire à l_0 en z s'appelle angle de parallélisme. Montrer que $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{sh} \rho$.

14. Montrer que la longueur d'un cercle et l'aire d'un disque de rayon r en géométrie de Lobatchevski sont respectivement égales à $\gamma\pi = 2\pi \operatorname{sh} r$ et $s\pi = 4\pi \operatorname{sh}^2 (r/2)$.

15. Montrer qu'en géométrie de Lobatchevski les triangles qui ont leurs trois angles homologues égaux sont égaux, et l'aire comprise entre deux droites parallèles est finie.

16. Montrer que la transformation $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, est associée à un mouvement de la sphère de Riemann si et seulement si $c = -\bar{b}$, $d = \bar{a}$ (la matrice des coefficients appartient à $SU(2)$).

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans ce chapitre on se penche sur les plus importantes méthodes d'étude des fonctions holomorphes, méthodes qui sont basées sur la représentation de ces fonctions par des intégrales spéciales (intégrales de Cauchy) ou par des sommes de séries (séries de Taylor et de Laurent). Commençons par la notion d'intégrales d'une fonction de variable complexe.

§ 5. Intégrale

15. Notion d'intégrale. Définition. Soit donné un chemin différentiable par morceaux $\gamma : I \to \mathbf{C}$, où $I = [\alpha, \beta]$ est un segment de l'axe réel et soit donnée sur l'image $\gamma(I)$ de ce chemin une fonction complexe f telle que $f \circ \gamma$ soit continue sur I. On appelle *intégrale* de la fonction f le long du chemin γ la quantité

$$\int_\gamma f \, dz = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \, dt, \tag{1}$$

où l'intégrale de la fonction complexe $f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ de la variable réelle t est comprise comme $\int_\alpha^\beta g_1(t) \, dt + i \int_\alpha^\beta g_2(t) \, dt$.

Remarquons que dans les conditions adoptées les fonctions g_1 et g_2 ne peuvent présenter qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce sur I (cf. définition d'un chemin différentiable par morceaux à la page 22), de sorte que l'intégrale (1) existe au sens de Riemann. Si l'on pose $f = u + iv$ et $dz = dx + i\,dy$, l'intégrale (1) peut être représentée sous la forme d'une intégrale curviligne par rapport aux coordonnées :

$$\int_\gamma f \, dz = \int_\gamma u \, dx - v \, dy + i \int_\gamma v \, dx + u \, dy. \tag{2}$$

On aurait pu définir l'intégrale (1) aussi comme la limite de sommes intégrales: subdiviser $\gamma(I)$ en un nombre fini de segments par les points $z_0 = \gamma(\alpha)$, $z_1 = \gamma(t_1)$, . . ., $z_n = \gamma(\beta)$, $\alpha < t_1 < < \ldots < \beta$, choisir arbitrairement des points $\zeta_k = \gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in \in [t_k, t_{k+1}]$, et poser

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\,\Delta z_k, \tag{3}$$

où $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ et $\delta = \max |\Delta z_k|$. Mais on ne se servira que de la première définition et on glissera sur la démonstration de son équivalence aux deux autres.

Si le chemin γ n'est que rectifiable, l'intégrale de Riemann est insuffisante même pour les fonctions continues à cause de la présence du facteur $\gamma'(t)$ au second membre de (1). Dans ce cas il faut se servir de l'intégrale de Lebesgue (et considérer alors naturellement que la fonction f est telle que $f \circ \gamma$ est sommable sur I).

Exemples. 1. Soient γ un cercle $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ et $f(z) = (z-a)^n$, où $n = 0, \pm 1, \ldots$ est un entier arbitraire. On a $\gamma'(t) = ire^{it}$, $f \circ \gamma(t) = r^n e^{int}$ et d'après la formule (1)

$$\int_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

On distinguera deux cas: pour $n \neq -1$ on a

$$\int_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = r^{n+1}\,\frac{e^{i(n+1)2\pi}-1}{n+1} = 0$$

puisque l'exponentielle est périodique; pour $n = -1$

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = i\int_0^2 \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Les puissances entières de $z - a$ possèdent donc la propriété d'« orthogonalité »

$$\int_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{pour } n = -1 \end{cases} \tag{4}$$

dont on se servira à maintes reprises.

2. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin différentiable par morceaux et $n \neq -1$, un entier quelconque. Si $n < 0$, on admettra encore que $\gamma(t) \neq 0$ sur I, i.e. que le chemin γ ne passe pas par le point $z = 0$. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée, on a

$\frac{d}{dt}\gamma^{n+1}(t) = (n+1)\gamma^n(t)\gamma'(t)$, donc

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_\alpha^\beta \gamma^n(t)\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\{\gamma^{n+1}(\beta) - \gamma^{n+1}(\alpha)\}. \tag{5}$$

On voit que les intégrales de z^n, $n \neq -1$, ne dépendent pas de la forme du chemin, mais seulement de son origine et de son extrémité. Elles sont nulles le long de chemins fermés (ne passant pas par $z = 0$ pour $n < 0$).

Enumérons les propriétés fondamentales de l'intégrale de fonctions complexes.

1° *Linéarité.* Si f et g sont des fonctions continues sur un chemin γ différentiable par morceaux, pour toutes constantes complexes a et b on a

$$\int_\gamma (af + bg)\,dz = a\int_\gamma f\,dz + b\int_\gamma g\,dz. \tag{6}$$

Ceci résulte directement de la définition.

2° *Additivité.* Soient donnés deux chemins $\gamma_1 = [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [\beta_1, \beta_2] \to \mathbf{C}$ différentiables par morceaux et tels que $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$. On appelle *réunion* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ de ces chemins le chemin $\gamma : [\alpha_1, \beta_2] \to \mathbf{C}$ tel que

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si} \quad t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t) & \text{si} \quad t \in [\beta_1, \beta_2]. \end{cases}$$

Pour toute fonction f continue sur $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, il s'ensuit directement de la définition de l'intégrale que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz. \tag{7}$$

Remarque. On peut renoncer à la condition $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$ dans la définition de la réunion $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Cette réunion ne sera alors pas un chemin continu, mais la propriété (7) restera en vigueur.

3° *Invariance.* **Théorème 1.** *Si un chemin* $\gamma_1 = [\alpha_1, \beta_1)] \to \mathbf{C}$ *s'obtient à partir d'un chemin différentiable par morceaux* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ *par un changement de paramètre admissible, i.e.* $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$, *où* τ *est une application différentiable par morceaux, strictement croissante de* $[\alpha, \beta]$ *sur* $[\alpha_1, \beta_1]$, *alors pour toute fonction* f *continue sur* γ *(donc sur* γ_1*) on a*

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_\gamma f\,dz. \tag{8}$$

▶ Par définition de l'intégrale

$$\int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma_1(\tau)\cdot\gamma_1'(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

et puisque $\gamma_1 \circ \tau(t) = \gamma(t)$ et $\gamma_1'[\tau(t)]\,\mathrm{d}\tau(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$, le théorème d'analyse réelle de changement des variables nous donne

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma_1(\tau)\cdot\gamma_1'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z. \ ◀$$

Ce théorème nous permet de tirer l'importante conclusion suivante : l'intégrale que nous avons définie pour un chemin a un sens pour une *courbe* (par courbe on entend une classe de chemins équivalents ; cf. n° 3). Plus exactement, l'intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin définissant une courbe différentiable par morceaux prend la même valeur le long de ce chemin.

D'après ce qui a été dit au n° 3, dans la suite on comprendra souvent par courbe un ensemble de points du plan complexe, image d'un segment $[\alpha, \beta]$ pour tout chemin définissant cette courbe. On parlera alors d'intégrale sur cet ensemble, comprenant par là une intégrale le long de la courbe correspondante. Les formules (4) peuvent par exemple être mises sous la forme suivante :

$$\int_{\{|z-a|=r\}} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i, \qquad \int_{\{|z-a|=r\}} (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0$$

pour $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$.

Remarque. Le théorème 1 reste valable pour les fonctions sommables sur des chemins rectifiables si l'on considère qu'un changement de paramètre monotone absolument continu est admissible (auquel cas, en effet, on peut se servir du théorème de changement des variables dans l'intégrale de Lebesgue). Donc la notion d'intégrale le long d'une courbe rectifiable a un sens.

4° *Orientabilité.* Désignons par γ^- le chemin obtenu à partir d'un chemin différentiable par morceaux $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ par le changement de variable $t \to \alpha + \beta - t$ (i.e. le chemin $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha, \beta]$) et soit f une fonction continue sur γ ; alors

$$\int_{\gamma^-} f\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z. \tag{9}$$

Cette assertion se prouve comme le théorème 1.

On dira que le chemin γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation.

5° *Estimation d'une intégrale.* **Théorème 2.** *Pour toute fonction f continue sur un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ différentiable par morceaux, on a*

$$\left| \int_\gamma f \, dz \right| \leqslant \int_\gamma |f| \, |d\gamma|, \tag{10}$$

où $|d\gamma| = |\gamma'(t)| \, dt$ est la différentielle de la longueur et l'intégrale du second membre est une intégrale curviligne.

▶ Désignons par J la valeur de l'intégrale de f le long de γ et supposons que $J = |J| e^{i\theta}$; on a

$$|J| = \int_\gamma e^{-i\theta} f \, dz = \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) \, dt$$

(nous avons inclus le facteur constant $e^{-i\theta}$ sous le signe d'intégration). L'intégrale de droite étant un nombre réel, on a

$$|J| = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t)\} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_\alpha^\beta |f[\gamma(t)]| \, |\gamma'(t)| \, dt = \int_\gamma |f| \, |d\gamma|. \ ◀$$

Corollaire. *Si dans les conditions du théorème précédent $|f(z)| \leqslant M$ partout sur γ, où M est une constante, alors*

$$\left| \int_\gamma f \, d\gamma \right| \leqslant M |\gamma| \tag{11}$$

($|\gamma|$ *désigne la longueur du chemin* γ).

L'inégalité (1)) résulte de (10) si l'on majore l'intégrale du second membre et l'on remarque que $\int_\gamma |d\gamma| = |\gamma|$.

✱ Montrer que si une fonction f est $\mathbf{R}$-dérivable au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$, alors existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\{|z-a|=\varepsilon\}} f(z) \, dz = 2\pi i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a).$$

[Indication: se servir de la formule

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)(\bar{z}-\bar{a}) + o(|z-a|)$$

et de l'exemple 2.] ✱

16. Primitive. Définition 1. On appelle *primitive* d'une fonction f dans un domaine D une fonction F holomorphe dans D et telle que

$$F'(z) = f(z) \tag{1}$$

pour tout $z \in D$. Si F est une primitive de f dans D, il en est de même de toute fonction $F(z) + C$, où C est une constante arbitraire. Réciproquement, soient F_1 et F_2 deux primitives de f dans un domaine D et $\Phi = F_1 - F_2$. La fonction Φ est holomorphe dans D, donc $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ dans D ; or $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi' = F_1' - F_2' \equiv 0$ dans D, donc $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 0$ dans D. D'où il vient, grâce à un théorème d'analyse (appliqué aux fonctions Re Φ et Im Φ), que $\Phi \equiv C$ est constante dans D. On a établi le

Théorème 1. *Si F est une primitive d'une fonction f dans un domaine D, l'ensemble de toutes les primitives de f est donné par la formule*

$$F(z) + C, \tag{2}$$

où C est une constante arbitraire.

Donc, si elle existe, la primitive d'une fonction f dans un domaine D est définie à une constante additive près.

Passons maintenant au problème de l'existence de la primitive. Etudions tout d'abord l'existence d'une primitive locale. Commençons par un théorème exprimant dans une forme élémentaire le théorème de Cauchy sur lequel repose toute la théorie d'intégration des fonctions holomorphes.

Théorème 2 (Cauchy). *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$, i.e. est holomorphe dans un domaine D, l'intégrale de f le long du contour orienté* *) *de tout triangle $\Delta \Subset D$ est nulle:*

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0. \tag{3}$$

▶ Supposons que le théorème est faux **) et qu'il existe un triangle $\Delta \Subset D$ tel que

$$\left| \int_{\partial\Delta} f\,dz \right| = M > 0. \tag{4}$$

Partageons Δ en quatre triangles à l'aide des lignes médianes et supposons que les contours de Δ et de ces triangles sont orientés

*) On admet que le bord $\partial\Delta$ (qui est supposé être une courbe différentiable par morceaux) est orienté de telle sorte que le triangle est toujours situé d'un même côté du sens de parcours.

**) Cette démonstration a été proposée par E. Goursat et publiée en 1900.

dans le sens direct (fig. 30). Il est évident que l'intégrale de f le long de $\partial\Delta$ est égale à la somme des intégrales le long des contours des petits triangles, car les intégrales le long des lignes médianes (signalées par deux flèches sur la figure 30) sont prises deux fois dans des sens contraires et donc se simplifient, quant aux autres parties des contours, elles constituent $\partial\Delta$. Il existe donc au moins un petit triangle — que nous désignerons par Δ_1 (le triangle supérieur sur la figure 30) — tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}.$$

En partageant le triangle Δ_1 en quatre triangles par les lignes médianes et en reprenant les mêmes raisonnements, on trouve au moins un triangle — que l'on désignera par Δ_2 — tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_2} f\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

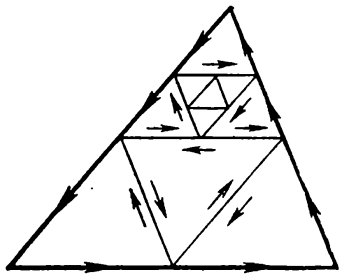

Fig. 30

En poursuivant cette procédure on obtient une suite de triangles emboîtés tels que pour l'intégrale prise sur le contour du n-ième triangle l'on a

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^n}. \tag{5}$$

Les triangles Δ_n (qui sont supposés fermés) possèdent un point commun z_0 qui appartient à Δ donc à D. La fonction f étant holomorphe au point z_0, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que dans la décomposition

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0) \tag{6}$$

l'on ait $|\alpha(z)| < \varepsilon$ pour tout z pris dans le voisinage $U = \{|z - z_0| < \delta\}$.

Le voisinage U contient au moins un triangle de la suite construite, le triangle Δ_n pour fixer les idées. En vertu de (6)

$$\int_{\partial\Delta_n} f\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z,$$

mais les deux premières intégrales du second membre sont nulles, car les facteurs constants $f(z_0)$ et $f'(z_0)$ peuvent être sortis du signe d'intégration, quant aux intégrales prises entre 1 et $z - z_0$ le long du chemin fermé $\partial\Delta_n$, elles sont nulles (cf. exemple 2 du numéro

précédent). Donc $\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz = \int\limits_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz$ où $|\alpha(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in \partial\Delta_n$. Par ailleurs, pour tout $z \in \partial\Delta_n$ la quantité $|z - z_0|$ est inférieure au périmètre $|\partial\Delta_n|$ du triangle Δ_n, donc, d'après le théorème d'estimation d'une intégrale,

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| < \varepsilon|\partial\Delta_n|^2.$$

Or, par construction, $|\partial\Delta_n| = |\partial\Delta|/2^n$, où $|\partial\Delta|$ est le périmètre du triangle Δ, donc

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| < \varepsilon|\partial\Delta|^2/4^n.$$

En tenant compte de (5), on trouve que $M < \varepsilon\,|\partial\Delta|^2$, d'où, puisque ε est arbitraire, $M = 0$, ce qui contredit l'hypothèse (4). ◀

On étudiera le théorème de Cauchy sous sa forme générale au numéro suivant. Pour l'instant on se propose de déduire à partir du théorème 2 un théorème local d'existence d'une primitive.

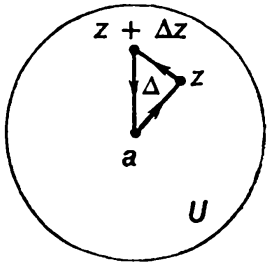

Fig. 31

Théorème 3. *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$, elle admet une primitive*

$$F(z) = \int\limits_{[a,\,z]} f(\zeta)\,d\zeta \tag{7}$$

dans tout disque $U = \{|z - a| < r\} \subset D$ (l'intégrale est prise le long d'un segment $[a, z] \subset U$).

▶ Fixons un point $z \in U$ et admettons que $|\Delta z|$ est si petit que le point $z + \Delta z \in U$ (fig. 31). Le triangle Δ de sommets a, z et $z + \Delta z$ appartient alors proprement à D et d'après le théorème 2

$$\int\limits_{[a,\,z]} f\,d\zeta + \int\limits_{[z,\,z+\Delta z]} f\,d\zeta + \int\limits_{[z+\Delta z,\,a]} f\,d\zeta = 0.$$

Le premier terme est égal à $F(z)$, le second, à l'intégrale prise avec le signe moins le long du segment $[a, z + \Delta z]$, i.e. à $-F(z + \Delta z)$, donc

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{[z,\,z+\Delta z]} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

D'autre part,

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,\,z+\Delta z]} f(z)\,d\zeta$$

(nous avons sorti le facteur constant $f(z)$ du signe d'intégration) et compte tenu de (8) on peut écrire

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{[z,\, z+\Delta z]}\{f(\zeta)-f(z)\}\,d\zeta. \tag{9}$$

Utilisons maintenant la continuité de la fonction f: pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que pour $|\Delta z| < \delta$ l'on ait $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $\zeta \in [z, z+\Delta z]$. Ceci aidant, on déduit de (9) que pour tout $|\Delta z| < \delta$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon,$$

ce qui exprime l'existence de $F'(z) = f(z)$. ◀

Remarque. En démontrant le théorème 3 nous n'avons utilisé que deux propriétés de la fonction f: sa continuité dans le domaine D et le fait que l'intégrale de f le long du contour orienté de tout triangle $\Delta \Subset D$ est nulle. On peut donc affirmer que la fonction F définie par la formule (7) sera une primitive locale de toute fonction f possédant ces deux propriétés.

Le problème de l'existence d'une primitive globale sur D est plus compliqué. Nous l'aborderons au numéro suivant. Pour l'instant nous allons seulement montrer comment obtenir une primitive le long d'un chemin donné en collant des primitives locales.

Définition 2. Soient donnés dans un domaine D une fonction f et un chemin (continu) $\gamma: I=[\alpha, \beta] \to D$. On dira qu'une fonction $\Phi: I \to \mathbf{C}$ est une *primitive de la fonction f le long du chemin* γ si: 1) elle est continue sur I et 2) pour tout point $t_0 \in I$ il existe un voisinage $U \subset D$ du point $z_0 = \gamma(t_0)$ dans lequel f possède une primitive F_U telle que

$$F_U \circ \gamma(t) = \Phi(t) \tag{10}$$

pour tout t pris dans un voisinage $u_{t_0} \subset I$.

Remarquons que si f possède une primitive F partout dans le domaine D, la fonction $F \circ \gamma(t)$ peut servir de primitive le long du chemin γ. Mais dans la définition on n'exige pas que la primitive existe sur D, il suffit qu'elle existe localement, au voisinage de chaque point $z_0 \in \gamma$. Bien plus, si $\gamma(t') = \gamma(t'') = z'$ pour $t' \neq t''$, deux primitives de f correspondant l'une au voisinage $u_{t'}$, l'autre, au voisinage $u_{t''}$ ne sont pas censées être confondues: elles peuvent différer d'une constante (on remarquera que ces primitives agissent au voisinage d'un même point z' et d'après le théorème 1 leur

différence ne peut être que constante). Donc, étant une fonction du paramètre t, la primitive le long de γ peut ne pas être une fonction du point z.

Théorème 4. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ et tout chemin (continu) $\gamma: I \to D$, la primitive de f le long de γ existe et est définie à une constante additive près.*

▶ Subdivisons le segment $I = [\alpha, \beta]$ en n segments $I_k = [t_k, t'_k]$ de telle sorte que deux segments voisins se recouvrent partiellement ($t_k < t_{k+1} < t'_k$, $t_1 = \alpha$, $t'_n = \beta$; fig. 32). La fonction $\gamma(t)$ étant uniformément continue, on peut choisir I_k assez petits pour que pour tout $k = 1, \ldots, n$ l'image $\gamma(I_k)$ soit contenue dans un disque $U_k \subset D$ dans lequel f admet une primitive (en vertu du théorème 2).

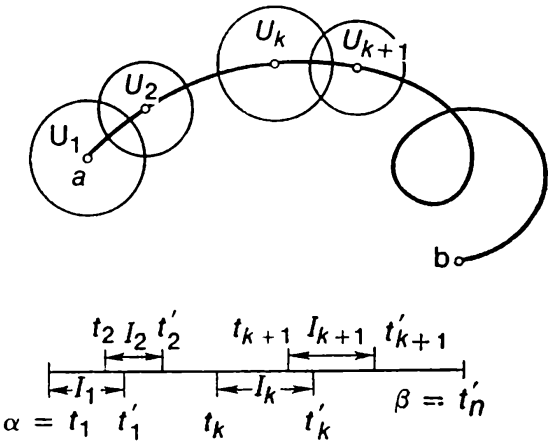

Fig. 32

Parmi les primitives définies dans U_1 (ces primitives diffèrent entre elles d'une constante) choisissons arbitrairement l'une d'elles et désignons-la par F_1. Considérons une primitive définie dans U_2; dans l'intersection $U_1 \cap U_2$ elle ne peut différer de F_1 que d'une constante additive (puisque ce sont deux primitives d'une même fonction). Donc, parmi les primitives définies dans U_2 il en existe une — que nous désignerons par F_2 — qui est confondue avec F_1 dans l'intersection $U_1 \cap U_2$.

Poursuivons cette procédure: choisissons dans chaque U_k une primitive F_k telle que $F_k \equiv F_{k-1}$ dans l'intersection $U_{k-1} \cap U_k$ ($k = 1, \ldots, n$). La fonction

$$\Phi(t) = F_k \circ \gamma(t), \quad t \in I_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

sera une primitive de f le long du chemin γ. En effet, elle est de toute évidence continue sur l'intervalle I et pour tout point $t_0 \in I$ il existe un voisinage dans lequel $\Phi(t) = F_U \circ \gamma(t)$, où F_U est une primitive de f définie au voisinage de $\gamma(t_0)$.

Reste à prouver la deuxième partie du théorème. Soient Φ_1 et Φ_2 deux primitives de f le long du chemin γ. Dans un voisinage u_{t_0} de tout point $t_0 \in I$, on a $\Phi_1 = F^{(1)} \circ \gamma(t)$ et $\Phi_2 = F^{(2)} \circ \gamma(t)$, où $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ sont deux primitives de f définies dans un voisinage du point $\gamma(t_0)$. Ces primitives ne pouvant différer que d'une constante additive, $\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ est constante dans u_{t_0}. Or, une fonction localement constante en chaque point d'un ensemble con-

nexe est constante sur cet ensemble *). Donc $\Phi_1(t) - \Phi_2(t) = \text{const}$ pour I. ◀

Si l'on connaît une primitive de f le long d'un chemin γ, l'intégrale de f le long de γ se calcule par la formule classique de Newton — Leibniz :

Théorème 5. *Si* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ *est un chemin différentiable par morceaux et* f *une fonction continue sur* γ *et possédant une primitive* $\Phi(t)$ *le long de* γ, *alors*

$$\int_\gamma f\,dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{11}$$

▶ Supposons d'abord que le chemin γ est différentiable et entièrement situé dans un domaine où la fonction f admet une primitive F. La fonction $F \circ \gamma$, étant une primitive de f le long de γ, diffère de Φ d'une constante additive, i.e. $\Phi(t) = F \circ \gamma(t) + C$. Le chemin γ étant différentiable et $F'(z) = f(z)$, il existe pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ une dérivée continue $\Phi'(t) = f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$. Mais, par définition de l'intégrale,

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

ce qui prouve le théorème dans ce cas particulier.

Dans le cas général, on peut subdiviser γ en un nombre fini de chemins $\gamma_\nu : [\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}] \to \mathbf{C}$ $(\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta)$ de telle sorte que chacun d'eux soit différentiable et contenu dans un domaine où f admet une primitive. D'après ce qui vient d'être démontré,

$$\int_{\gamma_\nu} f\,dz = \Phi(\alpha_{\nu+1}) - \Phi(\alpha_\nu)$$

et en ajoutant toutes ces égalités, on obtient (11). ◀

Remarque 1. Si l'on envisage l'intégrale de Lebesgue au lieu de celle de Riemann, on peut démontrer le théorème 5 exactement de la même façon pour les chemins rectifiables. Mais on peut aller plus loin. Si $f \in \mathcal{O}(D)$, elle admet d'après le théorème 4 une primitive Φ le long d'un chemin continu $\gamma : I \to D$. En tenant compte du théorème 5, on définit une intégrale de f le long d'un chemin conti-

*) En effet, soit $E = \{t \in I : \varphi(t) = \varphi(t_0)\}$. Cet ensemble n'est pas vide, car il contient t_0. Il est ouvert, puisque φ est localement constante et tout point t est contenu dans E avec un voisinage u_t. Or, il est fermé, puisque φ est continue car localement constante, donc les conditions $\varphi(t_n) = \varphi(t_0)$ et $t_n \to t''$ entraînent que $\varphi(t'') = \varphi(t_0)$. D'après le théorème 2 du n° 4 on a $E \equiv I$.

nu $\gamma \subset D$ comme l'accroissement de sa primitive le long de γ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de variation du paramètre.

Il est évident que le second membre de (11) est invariant par les changements admissibles du paramètre. On peut donc envisager l'intégrale de fonctions holomorphes le long de toute courbe (continue).

Remarque 2. Le théorème 5 permet de s'assurer de la véracité de la proposition énoncée au début de ce numéro, savoir que toute fonction holomorphe ne possède pas nécessairement une primitive dans un domaine multiplement connexe. Soient un domaine $D = \{0 < |z| < 2\}$ et la fonction $f(z) = 1/z$ holomorphe dans D; cette fonction ne possède pas de primitive dans D. En effet, si f admettait une primitive F dans D, une primitive le long d'un chemin $\gamma: [\alpha, \beta] \to D$ contenu dans D serait $F \circ \gamma(t)$ et d'après le théorème 5

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a),$$

où $a = \gamma(\alpha)$ et $b = \gamma(\beta)$ sont les extrémités de γ. En particulier, l'intégrale de f le long de tout chemin fermé $\gamma \subset D$ tel que $b = a$ serait nulle. Or nous savons (cf. exemple 1 du n° 15) que l'intégrale de f le long du cercle unitaire vaut

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i.$$

Enonçons les résultats de ce paragraphe en termes de formes différentielles. Une forme $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, où P et Q sont des fonctions de classe C^1 dans un domaine D, s'appelle *fermée*, si sa différentielle $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$ sur D, et *exacte*, s'il existe dans D une fonction u telle que $\omega = \mathrm{d}u$ (i.e. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$). On peut, comme nous l'avons déjà fait plus haut, substituer à x et y les variables z et $\bar{z}$ qui s'expriment linéairement en fonction de x et y (à vrai dire avec un coefficient imaginaire). La forme devient alors $\omega = f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}$ et sa différentielle $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$.

En particulier, pour les formes $\omega = f\,\mathrm{d}z$ étudiées ici, on a $\mathrm{d}\omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$, de sorte qu'elles sont fermées si et seulement si la fonction f est holomorphe. Une forme $\omega = f\,\mathrm{d}z$ sera exacte si et seulement s'il existe une fonction F telle que sur D

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z},$$

i.e. $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = F' = f$. Le théorème 3 peut par conséquent être formulé comme suit : *toute forme* $\omega = f\,dz$ *fermée dans un domaine* D *est localement exacte*. L'exemple $\omega = dz/z$ de la dernière remarque montre qu'une forme fermée n'est pas globalement exacte dans n'importe quel domaine ; dans le numéro suivant on montrera que les formes fermées sont globalement exactes dans les domaines simplement connexes.

17. Théorème de Cauchy. Nous allons démontrer dans sa forme générale le théorème de Cauchy qui est le théorème fondamental de la théorie d'intégration des fonctions holomorphes (pour la forme simple la démonstration a été faite au numéro précédent). Ce théorème affirme que l'intégrale d'une fonction holomorphe dans un domaine ne varie pas si le chemin d'intégration se déforme continûment à l'intérieur de ce domaine de telle sorte que ses extrémités restent fixes ou que le chemin reste fermé. En passant aux énoncés rigoureux, il nous faut définir tout d'abord ce qu'on entend par déformation continue d'un chemin.

Par souci de simplicité on admettra que pour tous les chemins considérés le paramètre t varie sur le même intervalle $I = [0, 1]$. Cette condition ne restreint en rien la généralité, car on peut toujours y satisfaire par un changement admissible du paramètre, changement qui nous permettra de passer à un chemin équivalent sans modifier la valeur de l'intégrale.

Définition 1. On dit que deux chemins $\gamma_0 : I \to D$ et $\gamma_1 : I \to D$ d'extrémités communes $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ sont *homotopes* dans un domaine D s'il existe une application continue $\gamma(s, t) : I \times I \to D$ (par $I \times I$ on désigne le produit de deux segments, i.e. le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$) telle que

$$\begin{aligned} &\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t), \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t) \quad (t \in I), \\ &\gamma(s, 0) \equiv a, \qquad \gamma(s, 1) \equiv b \qquad (s \in I). \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $s = s_0 \in I$ fixe, la fonction $\gamma(s_0, t) : I \to D$ définit un chemin dans le domaine D, et de plus de tels chemins varient continûment lorsque s_0 varie et leur famille « relie » les chemins γ_0 et γ_1 dans D (fig. 33). Donc, dire que deux chemins sont homotopes dans D revient à dire qu'on peut les déformer continûment l'un en l'autre à l'intérieur de D.

De façon analogue, on dit que deux chemins fermés $\gamma_0 : I \to D$ et $\gamma_1 : I \to D$ sont *homotopes* dans un domaine D s'il existe une application continue $\gamma(s, t) : I \times I \to D$ telle que

$$\begin{aligned} &\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t), \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t) \quad (t \in I) \\ &\gamma(s, 0) \equiv \gamma(s, 1) \quad (s \in I). \end{aligned} \tag{2}$$

Sur la figure 34 les chemins γ_0 et γ_1 sont homotopes; quant au chemin γ, il ne l'est à aucun d'eux.

Il est d'usage de désigner l'homotopie par le symbole $\sim$ de sorte que si γ_0 est homotope à γ_1, on écrira $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

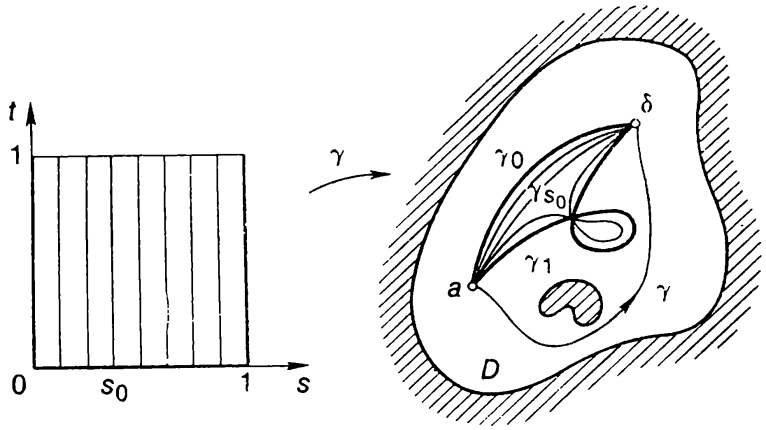

Fig. 33

Il est évident que l'homotopie satisfait aux axiomes ordinaires d'une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie et transitivité). Donc dans un domaine donné, tous les chemins d'extrémités communes ou tous les chemins fermés peuvent être divisés en classes regroupant chacune tous les chemins homotopes; ces classes s'appellent *classes d'homotopie.*

Parmi les classes de chemins fermés, il y a lieu de distinguer la classe des chemins homotopes à zéro. On dit qu'un chemin fermé γ est *homotope à zéro* dans un domaine D s'il existe une application continue $\gamma(s, t)$: $I \times I \to D$ satisfaisant aux conditions (2) telle que $\gamma_1(t) \equiv \text{const}$ (ce qui exprime que γ est réduit à un point par une déformation continue à l'intérieur de D).

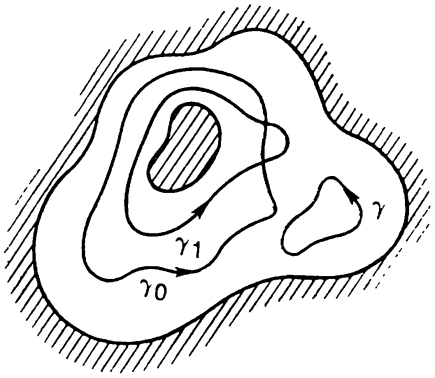

Fig. 34

Dans un domaine simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à zéro, donc deux chemins quelconques d'extrémités communes sont homotopes (cette propriété peut être prise pour définition de la connexité simple). Par conséquent, dans les domaines simplement connexes la décomposition en classes d'homotopie est triviale.

✱ Prouver l'équivalence des deux propositions suivantes : a) tout chemin fermé est homotope à zéro dans un domaine D ; b) deux chemins quelconques d'extrémités communes sont homotopes dans un domaine D. ✱

L'homotopie de deux chemins se généralise aux courbes puisque de toute évidence elle n'est pas violée par des changements admissibles de paramètre. Plus exactement, deux courbes (fermées ou d'extrémités communes) sont *homotopes* dans un domaine D s'il en est de même des chemins γ_1 et γ_2 qui les représentent respectivement.

Au début de ce chapitre nous avons introduit la notion d'intégrale le long d'un chemin et avons vu que cette intégrale était définie en fait non pas par un chemin mais par une courbe, i.e. par une classe de chemins équivalents. Le théorème de Cauchy sous sa forme générale affirme que dans le cas de fonctions holomorphes on peut aller plus loin : l'intégrale est définie non pas par une courbe, mais par la classe d'homotopie à laquelle appartient cette courbe. En d'autres termes, on a le

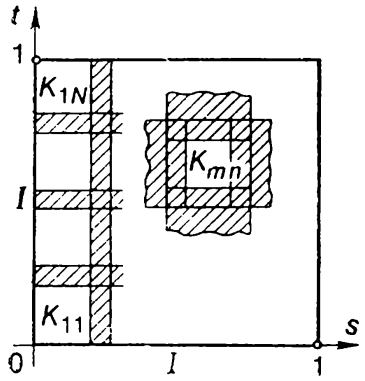

Fig. 35

Théorème (Cauchy). *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ et γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes dans D (soit qu'ils ont des extrémités communes, soit qu'ils sont fermés), alors*

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz. \tag{3}$$

▶ Soit γ: $I \times I \to D$ la fonction définissant l'homotopie des chemins γ_0 et γ_1 (cf. définition 1). Recouvrons le carré $K = I \times I$ par un système de petits carrés K_{mn} ($m, n = 1, \ldots, N$) de telle sorte que chaque K_{mn} rencontre chaque carré voisin (fig. 35). La fonction γ étant uniformément continue, les carrés K_{mn} peuvent être choisis assez petits pour que l'image $\gamma(K_{mn})$ soit contenue dans un disque $U_{mn} \subset D$ dans lequel la fonction f possède une primitive F_{mn} (on s'est servi du fait que localement toute fonction holomorphe possède une primitive). Fixons l'indice m et procédons comme dans la démonstration du théorème 4 du numéro précédent. Choisissons arbitrairement une primitive F_{m1} définie dans U_{m1} et une primitive F_{m2} définie dans U_{m2} et telle que $F_{m1} = F_{m2}$ dans $U_{m1} \cap U_{m2}$ (on se sert du fait que deux primitives de f ne peuvent différer que d'une constante dans cette intersection). Choisissons de la même façon les primitives $F_{m3}, \ldots, F_{mN}$ (de sorte que $F_{m,\,n+1} = F_{mn}$ dans $U_{m,n+1} \cap U_{mn}$) et construisons la fonction

$$\Phi_m(s, t) = F_{mn} \circ \gamma(s, t) \text{ pour } (s, t) \in K_{mn} \quad (n = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

La fonction Φ_m est visiblement continue dans le rectangle $K_m = \bigcup_{n=1}^{N} K_{mn}$ et définie à une constante additive près. Choisissons Φ_1 arbitrairement et Φ_2 de telle sorte que $\Phi_1 = \Phi_2$ dans l'intersection $K_1 \cap K_2$ *). Choisissons de la même façon les fonctions $\Phi_3, \ldots, \Phi_N$ (de sorte que $\Phi_m = \Phi_{m+1}$ dans $K_m \cap K_{m+1}$) et construisons la fonction

$$\Phi(s, t) = \Phi_m(s, t) \quad \text{pour} \quad (s, t) \in K_m \quad (m = 1, \ldots, N). \tag{5}$$

Pour $s \in I$ fixe, la fonction $\Phi(s, t)$ est visiblement une primitive le long du chemin $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$, donc d'après la formule de Newton — Leibniz

$$\int_{\gamma_s} f\,dz = \Phi(s, 1) - \Phi(s, 0). \tag{6}$$

Traitons séparément deux cas:

a) Supposons que γ_1 et γ_2 possèdent des extrémités communes. Par définition de l'homotopie, pour tout $s \in I$ on a alors $\gamma(s, 0) = a$ et $\gamma(s, 1) = b$. Les fonctions $\Phi(s, 0)$ et $\Phi(s, 1)$ sont donc localement constantes en chaque point de I, donc sur I. Par conséquent, $\Phi(0, 0) = \Phi(1, 0)$, $\Phi(0, 1) = \Phi(1, 1)$ et la formule (6) entraîne la formule (3).

b) Supposons que γ_1 et γ_2 sont fermés. Puisque $\gamma(s, 0) = \gamma(s, 1)$ pour tout $s \in I$, il s'ensuit que $\Phi(s, 1) - \Phi(s, 0)$ est localement constante en chaque point de I, donc sur I. Par conséquent, (6) entraîne de nouveau (3).

✱ Montrer que si une fonction f est holomorphe dans une couronne $V = \{r < |z - a| < R\}$, son intégrale $\int_{\{|z-a|=\rho\}} f(z)\,dz$ prend la même valeur pour tout ρ, $r < \rho < R$. ✱

18. Cas particuliers. On étudie quelques cas particuliers du théorème général de Cauchy qui, vu leur importance, méritent d'être énoncés séparément.

Théorème 1. *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$, son intégrale le long de tout chemin fermé $\gamma: I \to D$, homotope à zéro dans D, est nulle:*

$$\int_{\gamma} f\,dz = 0 \quad si \quad \gamma \sim 0. \tag{1}$$

▶ Le chemin γ étant homotope à 0, on peut le déformer en un point $a \in D$ et par suite en un cercle $\gamma_\varepsilon = \{|z - a| = \varepsilon\}$ de rayon ε

*) Ceci est possible puisque la fonction $\Phi_2 - \Phi_1$ est constante, car localement constante, donc continue sur l'ensemble connexe $K_1 \cap K_2$.

aussi petit que l'on veut. D'après le théorème général de Cauchy,

$$\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\varepsilon} f\,\mathrm{d}z,$$

et puisque la fonction f est bornée dans un voisinage du point a (pour fixer les idées $|f| \leqslant M$), l'intégrale du second membre tend vers 0 avec ε (cette intégrale est majorée par $M \cdot 2\pi\varepsilon$). Le premier membre est nul, puisqu'il ne dépend pas de ε. ◀

Le théorème de Cauchy prend une forme particulièrement simple — sa forme classique — dans un domaine simplement connexe, car dans un tel domaine tout chemin fermé est homotope à zéro.

Théorème 2. *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \subset C$, son intégrale le long de tout chemin fermé $\gamma: I \to D$ est nulle.*

En raison de l'importance de ce théorème nous allons en produire encore une démonstration élémentaire sous les deux conditions supplémentaires suivantes: 1) la dérivée f' est continue *) dans D et 2) γ est un chemin de Jordan différentiable par morceaux.

De la deuxième condition il résulte que γ est le bord d'un domaine $G \subset D$, puisque D est simplement connexe. La première condition permet d'appliquer la formule de Riemann — Green

$$\int_{\partial G} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

formule dont la démonstration implique la continuité dans $\bar{G}$ des dérivées partielles des fonctions P et Q (∂G désigne le bord de G parcouru dans le sens direct). En appliquant cette formule aux parties réelle et imaginaire de l'intégrale

$$\int_{\partial G} f\,\mathrm{d}z = \int_{\partial G} u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i \int_{\partial G} v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y,$$

on obtient

$$\int_{\partial G} f\,\mathrm{d}z = \iint_G \left\{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Utilisons le symbole de la dérivée formelle $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (cf. n° 6) pour mettre la dernière relation sous la forme

$$\int_{\partial G} f\,\mathrm{d}z = 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

*) On verra bientôt que cette condition est automatiquement réalisée pour les fonctions holomorphes.

qui peut être traitée comme la forme complexe de la formule de Riemann — Green.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ en raison de l'holomorphie, le théorème de Cauchy (sous les conditions supplémentaires posées) résulte directement de cette formule.

Remarquons que l'application des formes différentielles et du théorème de Stokes conduit directement à la formule (3):

$$\int_{\partial G} f\,\mathrm{d}z = \iint_G \mathrm{d}\,(f\,\mathrm{d}z) = \iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z, \tag{4}$$

or, nous avons vu plus haut que $\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = 2i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Le théorème de Cauchy nous permet d'établir immédiatement un théorème global d'existence de la primitive dans un domaine simplement connexe.

Théorème 3. *Toute fonction f holomorphe dans un domaine D simplement connexe admet une primitive dans D.*

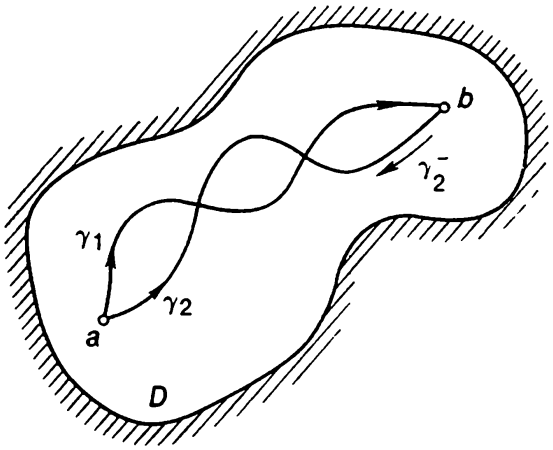

Fig. 36

▶ Montrons que dans D l'intégrale de f le long d'un chemin non fermé ne dépend pas de ce chemin, mais de son origine et de son extrémité. En effet, soient γ_1 et γ_2 deux chemins de D joignant des points a et b (fig. 36). Sans perdre en généralité on peut admettre que pour γ_1 le paramètre varie sur un segment $[\alpha, \beta_1]$ et pour γ_2 sur un segment $[\beta_1, \beta]$ $(\alpha < \beta_1 < \beta)$. Désignons par γ la réunion des chemins γ_1 et γ_2^-; cette réunion est un chemin fermé contenu dans D. D'après les propriétés des intégrales,

$$\int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z,$$

or, d'après le théorème 2, l'intégrale de f le long de tout chemin fermé $\gamma \subset D$ est nulle, d'où notre proposition *).

Fixons maintenant un point $a \in D$ et supposons qu'il est l'origine d'un chemin contenu dans D, dont l'extrémité z sera supposée

*) On peut déduire cette proposition directement du théorème général de Cauchy si l'on se sert du fait que dans un domaine simplement connexe deux chemins quelconques d'extrémités communes sont homotopes.

arbitraire. L'intégrale de f le long de ce chemin (que nous désignerons par $\widehat{az}$) est une fonction du point z:

$$F(z) = \int_{\widehat{az}} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{5}$$

En reprenant *ad litteram* les raisonnements qui nous ont servi à établir le théorème 3 du n° 16, on s'assure que F est holomorphe dans D et que $F'(z) = f(z)$ en tout point $z \in D$, autrement dit, F est une primitive de f sur D. ◀

L'exemple de la fonction $f = 1/z$ dans le domaine $0 < |z| < 2$ (cf. remarque 2 du n° 16) montre que la condition de simple connexité du domaine est essentielle dans ce théorème: le théorème global d'existence de la primitive est généralement mis en défaut dans les domaines multiplement connexes.

Le même exemple montre que dans un domaine multiplement connexe l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin fermé n'est pas nécessairement nulle, i.e. le théorème de Cauchy dans sa forme classique (théorème 2) ne se généralise pas aux domaines multiplement connexes. Mais on peut l'énoncer sous une forme autorisant une telle généralisation.

Le bord ∂D d'un domaine simplement connexe D (s'il n'est pas trop mauvais) est une courbe fermée homotope à zéro dans l'adhérence $\bar{D}$. Dans le cas général on ne peut appliquer le théorème 1 à ∂D, car la fonction f est définie uniquement sur D et peut ne pas être prolongée à ∂D. Si l'on exige accessoirement que $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$, i.e. si f se prolonge à un domaine $G \supset \bar{D}$ (cf. n° 6), le théorème 1 sera valable. Nous obtenons le théorème de Cauchy sous la forme suivante:

Théorème 4. *Si une fonction f est holomorphe dans l'adhérence $\bar{D}$ d'un domaine simplement connexe D, limité par une courbe continue, l'intégrale de f le long de cette courbe est nulle.*

✱ Dans certains cas on peut affaiblir la condition du théorème 4 en exigeant que la fonction f ne soit prolongeable que par continuité à $\bar{D}$. Supposons par exemple que le domaine D est *étoilé* par rapport au point $z = 0$, i.e. sa frontière ∂D se représente par une équation polaire $r = r(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, où $r(\varphi)$ est une fonction uniforme; supposons encore que la fonction $r(\varphi)$ est différentiable par morceaux. Montrer que dans ces conditions le théorème 4 est valable pour des fonctions f holomorphes dans D et continues dans $\bar{D}$. ✱

Le théorème 4 se généralise également aux domaines multiplement connexes si l'on introduit la

Définition. Supposons que la frontière d'un domaine D compact *) est constituée d'un nombre fini de courbes fermées γ_ν ($\nu = 0, \ldots, n$). Admettons que la frontière extérieure γ_0, i.e. la courbe séparant les points de D du point à l'infini, est orientée dans le sens direct, et les autres courbes frontières γ_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), dans le sens rétrograde (autrement dit, les courbes sont orientées de telle sorte que le domaine reste toujours à gauche du sens de parcours ; fig. 37). La frontière du domaine D munie d'une telle orientation sera appelée *frontière orientée* et désignée par le symbole ∂D **).

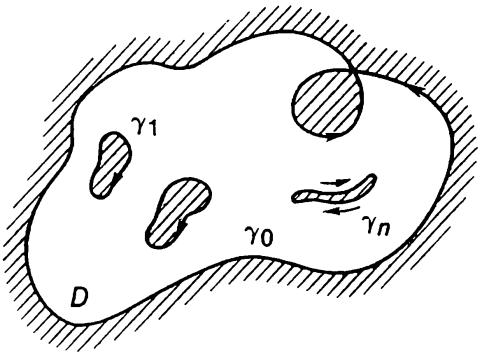

Fig. 37

Le théorème de Cauchy pour des domaines multiplement connexes peut désormais être formulé comme suit :

Théorème 5. *Supposons qu'un domaine compact D est limité par un nombre fini de courbes continues et que f est une fonction holomorphe dans l'adhérence $\overline{D}$. Alors l'intégrale de f le long de la frontière orientée ∂D est nulle :*

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_{\gamma_0} f\,dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f\,dz = 0. \tag{6}$$

▶ Relions les composantes de la frontière de D par un nombre fini de coupures $\lambda_\nu^{\pm}$ (pour la suggestion ces coupures sont représentées par deux lèvres sur la figure 38). Il est évident que la courbe fermée Γ qui est composée de la frontière orientée ∂D et des ensembles $\Lambda^+ = \bigcup \lambda_\nu^+$ et $\Lambda^- = \bigcup \lambda_\nu^-$ est homotope à zéro dans un domaine $G \supset \overline{D}$ ***) dans lequel f se prolonge en une fonction holomorphe par hypothèse. D'après le théorème 1, l'intégrale de f le long de Γ est nulle, et d'après les propriétés des intégrales,

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \int_{\partial D} f\,dz + \int_{\Lambda^+} f\,dz + \int_{\Lambda^-} f\,dz = \int_{\partial D} f\,dz,$$

car les intégrales de f le long de Λ^+ et Λ^- s'annulent. ◀

---

*) On rappelle qu'un domaine D est *compact* si son adhérence dans $\overline{\mathbb{C}}$ ne contient pas le point à l'infini ($D \Subset \mathbb{C}$).

**) On se sert ici des représentations géométriques de la frontière orientée.

***) On peut le prouver par récurrence sur le nombre de composantes de ∂D. Remarquons toutefois que la démonstration formelle de cette construction est assez laborieuse.

Exemple. Soient $D = \{r < |z - a| < R\}$ une couronne circulaire et $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$, c'est-à-dire que f est holomorphe dans une couronne plus vaste dont la frontière est représentée en pointillé sur la figure 39. La frontière orientée ∂D est composée du cercle $\gamma_0 = \{|z - a| = R\}$ orienté dans le sens direct et du cercle $\gamma_1^- = \{|z - a| = r\}$ orienté dans le sens rétrograde (de telle sorte que

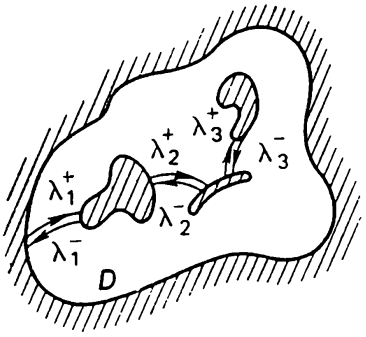

Fig. 38

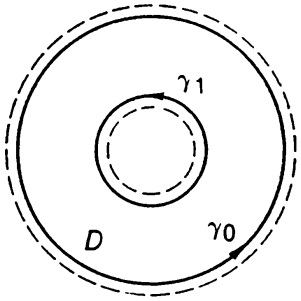

Fig. 39

la couronne reste à gauche du sens de parcours de ∂D). D'après le théorème 5,

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_{\gamma_0} f\,dz + \int_{\gamma_1^-} f\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$$

(le dernier résultat découle du théorème de Cauchy sur l'homotopie).

19. Formule intégrale de Cauchy. On se propose de représenter ici les fonctions holomorphes dans un domaine compact à l'aide d'une intégrale le long de la frontière de ce domaine. Nous verrons que cette représentation possède d'importantes applications dans les problèmes aussi bien théoriques que pratiques.

Théorème 1. *Soit f une fonction holomorphe dans l'adhérence $\bar{D}$ d'un domaine compact D limité par un nombre fini de courbes (continues). Alors pour tout $z \in D$ la fonction f se représente sous la forme*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{1}$$

où ∂D est la frontière orientée de D (cf. page 95).

Le second membre de cette formule s'appelle *intégrale de Cauchy.*

▶ Choisissons $\rho > 0$ tel que le disque $U_\rho = \{z' : |z' - z| < \rho\} \Subset D$ et posons $D_\rho = D \setminus \bar{U}_\rho$ (fig. 40). La fonction $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe dans $\bar{D}_\rho$ en tant que rapport de deux fonc-

tions holomorphes dont le dénominateur est $\neq 0$. La frontière orientée ∂D_ρ est constituée de ∂D et du cercle $\partial U_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$ orienté dans le sens rétrograde. Donc, d'après les propriétés des intégrales,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\rho} g\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or, la fonction g est holomorphe dans $\overline{D}_\rho$ (nous avons éliminé la singularité en z), donc est valable le théorème de Cauchy pour les domaines multiplement connexes en vertu duquel l'intégrale de g le long de ∂D_ρ est nulle.

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (2)$$

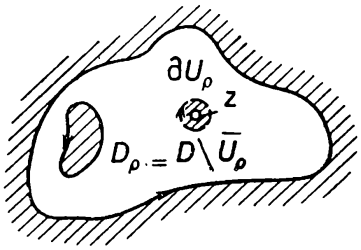

Fig. 40

où le nombre $\rho > 0$ peut être supposé aussi petit que l'on veut. La fonction f étant continue au point z, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir un nombre $\delta > 0$ assez petit pour que pour $\rho < \delta$ l'on ait

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \zeta \in \partial U_\rho.$$

Donc la différence *)

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (3)$$

est $< \frac{1}{2\pi}\varepsilon \cdot 2\pi = \varepsilon$ en valeur absolue et par suite tend vers 0 avec ρ. Mais on voit sur (2) que le premier membre de (3) est indépendant de ρ, donc il est nul pour ρ assez petit, i.e.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ceci et la formule (2) entraînent (1). ◀

Remarque. Si dans les conditions du théorème 1 le point z est extérieur à $\overline{D}$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0. \qquad (4)$$

---

*) On s'est servi du fait que $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$ (cf. exemple 1 du n° 15) et que le facteur constant $f(z)$ peut être entré sous le signe d'intégration.

Cette assertion résulte directement du théorème de Cauchy, car la fonction $g(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ est holomorphe dans $\bar{D}$.

La formule intégrale de Cauchy traduit un fait très intéressant: les valeurs d'une fonction holomorphe dans un domain $\bar{G}$ sont entièrement définies par ses valeurs sur la frontière ∂G. (En effet, si les valeurs de f sur ∂G sont connues, il en est de même du second membre de la formule (1), c'est-à-dire qu'on connaît la valeur de f en tout point $z \in G$). Ce fait distingue fondamentalement les fonctions holomorphes des fonctions **R**-différentiables.

✱ Soit f une fonction holomorphe dans l'adhérence d'un domaine D contenant le point à l'infini et supposons que la frontière ∂D est orientée de telle sorte que le domaine reste à gauche du sens de parcours. Montrer que pour tout point $z \in D$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+f(\infty). \ ✱$$

Le théorème 1 entraîne aussitôt le

Théorème 2 (de la moyenne). *La valeur d'une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ en chaque point fini $z \in D$ est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs sur tout cercle assez petit centré en z:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})\,dt. \tag{5}$$

▶ Considérons un disque $U_\rho=\{z' : |z'-z|<\rho\}$ tel que $U_\rho \Subset D$ et prenons-le pour le domaine G du théorème 1. La formule intégrale de Cauchy nous donne

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{6}$$

et puisque sur ∂U_ρ on a $\zeta-z=\rho e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, $d\zeta=\rho i e^{it}dt$, la formule (6) se ramène à (5). ◀

Le théorème de la moyenne montre que les fonctions holomorphes sont correctement construites et que leurs valeurs sont étroitement liées aux valeurs voisines. Ceci explique que ces fonctions possèdent de nombreuses propriétés spécifiques que n'ont pas les fonctions **R**-différentiables. Une grande partie de ces propriétés seront étudiées dans la suite.

Exhibons en conclusion la formule de représentation intégrale des fonctions **R**-différentiables qui généralise la formule intégrale de Cauchy.

Théorème 3. *Soit f une fonction de classe C^1 dans l'adhérence $\overline{D}$ d'un domaine compact D limité par un nombre fini de courbes différentiables par morceaux. En tout point $z \in D$ on a alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \tag{7}$$

On appellera la formule (7) *formule de Cauchy — Green*; si $f \in \mathcal{O}(D)$, l'intégrale double disparaît de la formule (7) et l'on obtient la formule de Cauchy.

▶ Eliminons du domaine D un petit disque $\overline{U}_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \rho\}$ et appliquons la formule de Riemann — Green dans sa forme complexe (cf. formule (3) n° 18) à la fonction $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ de classe C^1 dans le domaine $D_\rho = D \setminus \overline{U}_\rho$:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int\limits_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2i \iint\limits_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \;{}^{*)}.$$

La fonction f étant continue en z, on a $f(\zeta) = f(z) + O(\rho)$ pour $\zeta \in U_\rho$, où $O(\rho) \to 0$ avec ρ. Donc

$$\int\limits_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int\limits_{\partial U_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\partial U_\rho} \frac{O(\rho)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z) + O(\rho),$$

et la dernière formule nous donne (7) **) lorsque $\rho \to 0$. ◀

Maintenant que nous avons décrit les principaux faits se rapportant à l'intégration complexe, arrêtons-nous brièvement sur son historique. Le principal mérite revient à l'éminent mathématicien français A. Cauchy.

Augustin Louis Cauchy naquit en 1789 dans une famille aristocratique. En 1807 il acheva l'École polytechnique de Paris, établissement qui fut fondé pendant la Révolution française avec pour vocation la formation d'ingénieurs de haut rang. Pendant deux ans

---

*) On a $\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z}$, car la fonction $\frac{1}{\zeta - z}$ dépend holomorphiquement de ζ et sa dérivée par rapport à $\bar{\zeta}$ est nulle.

**) Notre raisonnement prouve l'existence de

$$\lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z},$$

mais puisque $f \in C^1(\overline{D})$, l'intégrale double de (7) existe (on peut s'en assurer en passant à des coordonnées polaires d'origine z) et cette limite est confondue avec elle.

ses élèves suivaient une préparation poussée en mathématiques, en mécanique et en dessin, puis étaient envoyés pendant deux ans encore dans l'une des quatre écoles d'ingénieurs. Cauchy opta pour l'Institut des ponts et chaussées qu'il acheva en 1810 et commença sa carrière d'ingénieur à Cherbourg.

Les activités de Cauchy couvraient de nombreux domaines: théorie de l'élasticité, optique, mécanique céleste, géométrie, algèbre, théorie des nombres. Mais son domaine de prédilection fut l'analyse mathématique, dont la refonte est liée à son nom. En 1816 le gouvernement le nomma membre de l'Académie des sciences de Paris et professeur à l'Ecole polytechnique. C'est ici qu'il fit ses remarquables leçons d'analyse qui furent publiées en trois volumes (1821-1828).

Le baron de Cauchy était un ardent partisan de la monarchie et de la religion. Cette période de son activité coïncide avec la restauration des Bourbons. Après la révolution de juillet 1830 Cauchy émirge en Italie avec la famille royale. Il revient en France en 1938, enseigne les mathématiques au collège des Jésuites et devient professeur à la Sorbonne en 1848 (sans pour autant prêter serment au gouvernement).

Cauchy obtint ses permiers résultats sur l'intégration complexe dans le *Mémoire sur la théorie des intégrales définies* qui fut présenté à l'Académie de Paris en 1814 et publié en 1825. De même qu'Euler, Cauchy fut conduit à ces résultats en étudiant des problèmes de dynamique des fluides. Il part de la relation (connue d'Euler)

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{d}x \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{Y} \mathrm{d}y \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

et envisage deux fonctions réelles S et V regroupées en une seule fonction complexe: $F = S + iV$. En portant $f = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$ dans (8), Cauchy obtient une formule reliant les intégrales de ces fonctions:

$$\int_{x_0}^{X} [V(x, Y) - V(x, y_0)]\,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y} [S(X, y) - S(x_0, y)]\,\mathrm{d}y.$$

Il obtient une formule analogue en substituant $f = \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ et ce n'est qu'en 1822 qu'il lui vient à l'idée de les regrouper en une seule formule complexe qu'il ajoute sous forme de note dans son mémoire de 1825. Ceci n'est autre que le théorème de Cauchy pour un contour rectangulaire; à noter que cette égalité est donnée sans sa signification géométrique.

Signalons que ce travail diffère très peu de celui qu'Euler présente en 1777 à l'Académie de Pétersbourg et dans lequel il cite la

formule

$$\int (u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)=\int u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y$$

et quelques-unes de ses applications. La même année 1825 Cauchy publie dans un brochure son *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, où il envisage une intégrale complexe comme la limite de sommes intégrales et remarque que pour préciser son sens il faut se donner encore des fonctions $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, monotones et continues pour $t_0 \leqslant t \leqslant T$ et telles que $\varphi(t_0) = x_0$, $\chi(t_0) = y_0$, $\varphi(T) = X$, $\chi(T) = Y$. Il semble qu'il ne connaissait pas encore l'interprétation géométrique de l'intégrale en tant qu'intégrale le long d'un chemin du plan complexe ni même l'interprétation géométrique des nombres complexes.

Son théorème fondamental, il l'énonce maintenant sous la forme suivante : « si $F(x + y\sqrt{-1})$ est finie et continue pour $x_0 \leqslant x \leqslant X$ et $y_0 \leqslant y \leqslant Y$, la valeur de l'intégrale est indépendante de la nature des fonctions $\varphi(t)$ et $\chi(t)$ ». Il prouve ce théorème en faisant varier les fonctions φ et χ et en montrant que la variation de l'intégrale est nulle. Signalons qu'une notion assez rigoureuse d'intégrale de fonctions d'une variable complexe en tant qu'intégrale le long d'un chemin du plan complexe et un théorème relatif à l'indépendance d'une intégrale par rapport au chemin d'intégration sont mentionnés pour la première fois par C. Gauss en 1811 dans une lettre à Bessel.

Cauchy prouva sa formule intégrale en 1831 dans un mémoire consacré à la mécanique céleste. Cauchy l'établit pour un cercle, ce qui suffit à justifier le développement des fonctions en séries entières (cf. paragraphe suivant). Nous parlerons plus bas des résultats de Cauchy à mesure de leur exposition.

§ 6. Séries de Taylor

Dans ce paragraphe on se propose, en partant de la formule intégrale de Cauchy, de représenter les fonctions holomorphes par des sommes de séries entières (séries de Taylor).

Rappelons les notions élémentaires d'analyse relatives aux séries. On dit qu'une série (de nombres complexes) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est *convergente* si la suite de ses sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ possède une limite finie s appelée *somme* de cette série.

On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ définies sur un ensemble $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ est *uniformément convergente* sur M si elle converge

en tout point z de M et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant N$ les restes $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$ pour tout z de M.

On démontre exactement comme en analyse réelle qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément sur un ensemble M si converge la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|$, où $\| f_n \| = \sup_{z \in M} | f_n(z) |$ (la dernière condition exprime que la série envisagée est majorée sur M par une série numérique convergente). On démontre de même que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un ensemble M est continue sur cet ensemble et qu'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur une courbe (de classe C^1 ou rectifiable) peut être intégrée terme à terme le long de cette courbe.

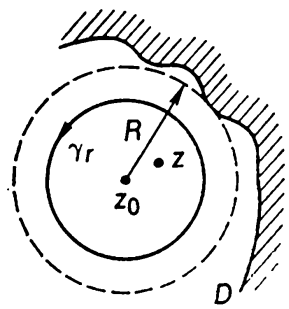

Fig. 41

20. Séries de Taylor. Le théorème suivant est fondamental en théorie des fonctions d'une variable complexe.

Théorème 1. *Une fonction f holomorphe dans un domaine D est développable pour tout $z_0 \in D$ en série entière de $z - z_0$ dans tout disque $U = \{| z - z_0 | < R\} \subset D$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{1}$$

▶ Soit z un point arbitraire de U ; choisissons un nombre r tel que $| z - z_0 | < r < R$ et désignons par γ_r le cercle $\{\zeta : | \zeta - z_0 | = r\}$ (fig. 41). La formule intégrale de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Pour représenter f par une série entière, développons le « noyau » de cette formule en une progression géométrique de $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{2}$$

multiplions les deux membres par $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ et intégrons terme à terme sur γ_r. La progression (2) converge uniformément et abso-

lument en ζ sur γ_r, puisque $\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\frac{|z-z_0|}{r}=q<1$ pour tout $\zeta\in\gamma_r$. L'uniformité de la convergence n'est pas violée par la multiplication par la fonction $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ continue, donc bornée sur γ_r. L'intégration terme à terme est donc licite et l'on obtient

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

où

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\quad(n=0,1,\ldots)\ ^{*)}.\ \blacktriangleleft \tag{3}$$

Définition. La série entière (1) dont les coefficients sont définis par les formules (3) s'appelle *série de Taylor* de la fonction f au voisinage de z_0 ou de centre z_0.

Le théorème de Cauchy sur l'homotopie (n° 17) nous dit que les coefficients c_n de la série de Taylor, définis par la formule (3), ne dépendent pas du rayon r du cercle γ_r $(0<r<R)$.

✱ 1. Trouver le rayon du plus grand disque dans lequel la fonction $z/\sin z$ se développe en série de Taylor au voisinage de $z_0=0$.

2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que a) la fonction f est paire si et seulement si sa série de Taylor au voisinage de $z_0=0$ ne contient que des puissances paires de z; b) réelle sur l'axe réel si et seulement si $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ pour tout z. ✱

Signalons des corollaires simples du théorème 1.

Inégalités de Cauchy. *Soit f une fonction holomorphe dans un disque fermé $\bar{U}=\{|z-z_0|\leqslant r\}$ et dont le module est inférieur à une constante M sur le cercle $\gamma_r=\partial U$. Les coefficients de la série de Taylor de f au voisinage de z_0 satisfont aux inégalités*

$$|c_n|\leqslant M/r^n\quad(n=0,1,\ldots). \tag{4}$$

▶ Puisque $|f(\zeta)|\leqslant M$ sur γ_r, les formules (3) nous donnent

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{M}{r^n}.\ \blacktriangleleft$$

---

*) Cauchy communiqua ce théorème en 1831 à l'Académie de Turin. Sa démonstration apparut d'abord sous forme lithographique en Italie et fut publiée en 1841 en France. Cauchy ne justifia pas la possibilité d'une intégration terme à terme de la série, ce qui entraîna la remarque de P. Tchébychev qui en 1844 signala dans un travail que cette intégration était possible « seulement dans des cas particuliers ».

✱ Soit $P(z)$ un polynôme de z de degré n. Montrer que si $|P(z)| \leqslant M$ pour $|z| = 1$, on a $|P(z)| \leqslant M|z|^n$ pour tout z, $|z| \geqslant 1$. ✱

Les inégalités de Cauchy entraînent l'intéressant

Théorème 2 (Liouville *)). *Si une fonction f est holomorphe et bornée sur* $\mathbf{C}$, *elle est constante.*

▶ D'après le théorème 1, dans tout disque fermé $\overline{U} = \{|z| \leqslant R\}$, $R < \infty$, la fonction f se représente par la série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dont les coefficients sont indépendants de R. La fonction f étant bornée sur $\mathbf{C}$ (pour fixer les idées $|f(z)| \leqslant M$), les inégalités de Cauchy entraînent $|c_n| \leqslant M/R^n$ pour tout $n = 0, 1, \ldots$ On peut prendre R aussi grand que l'on veut, donc pour $n = 1, 2, \ldots$ le second membre tend vers 0 lorsque $R \to \infty$. Or le premier membre est indépendant de R, donc $c_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $f(z) \equiv c_0$. ◀

Donc les deux propriétés — être holomorphes sur $\mathbf{C}$ et être bornées — ne peuvent coexister que pour les fonctions triviales (constantes).

✱ Démontrer les propriétés suivantes des fonctions f holomorphes sur $\mathbf{C}$:

1) Soit $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$; si $M(r) \leqslant Ar^N + B$, où $r > 0$ est un nombre quelconque, A, B et N des constantes, alors f est une fonction polynôme de degré inférieur à N.

2) Si les valeurs de f sont toutes situées dans le demi-plan de droite, alors $f \equiv$ const.

3) Si $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, l'ensemble $\{z \in \mathbf{C}: f(z) = 0\}$ n'est pas vide. ✱

Le théorème de Liouville s'énonce encore comme suit:

Théorème 2′. *Si une fonction f est holomorphe sur* $\overline{\mathbf{C}}$, *elle est constante.*

▶ La fonction f est holomorphe à l'infini (cf. fin du n° 6), donc $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ existe et est finie. D'où il s'ensuit que f est bornée dans un voisinage $\{|z| > R\}$ du point à l'infini. Dans le reste du

*) Joseph Liouville (1809-1882), mathématicien français. En fait ce théorème fut prouvé par Cauchy en 1844, quant à Liouville, il en publia un cas particulier la même année. Ce détournement de paternité est l'œuvre d'un élève de Liouville qui prit connaissance de ce théorème aux cours lus par ce dernier.

plan $\{ |z| \leqslant R\}$ elle est bornée en tant que fonction continue sur un ensemble borné formé. Donc f est bornée dans $\mathbf{C}$ et puisqu'elle est holomorphe, elle est constante d'après le théorème 2. ◀

✱ Montrer que toute fonction f holomorphe en $z = 0$ et satisfaisant identiquement à la condition $f(z) = f(2z)$ est constante. ✱

Le théorème 1 affirme que toute fonction holomorphe dans un disque se représente dans ce disque par la somme d'une série entière convergente. On se propose de prouver la réciproque, à savoir que la somme de toute série entière convergente est une fonction holomorphe. Rappelons à cet effet quelques propriétés des séries entières qui sont connues du cours d'analyse réelle.

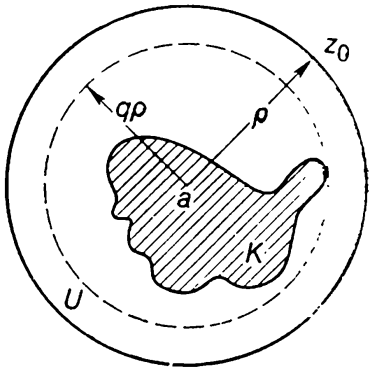

Fig. 42

Lemme. *Si les termes d'une série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{5}$$

sont bornés en un point $z_0 \in \mathbf{C}$, *i.e.*

$$|c_n (z_0 - a)^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

cette série converge dans un disque $U = \{z : |z - a| < |z_0 - a|\}$ *et converge absolument et uniformément sur tout sous-ensemble compact* $K \Subset U$.

▶ On peut admettre que $z_0 \neq a$, i.e. $|z_0 - a| = \rho > 0$, sinon l'ensemble U serait vide. Supposons que $K \Subset U$. Alors pour tout $z \in K$

$$|z - a|/\rho \leqslant q < 1$$

(fig. 42). Donc pour tout point $z \in K$ et tout $n = 0, 1, \ldots$, on a

$$|c_n (z-a)^n| \leqslant |c_n| \rho^n q^n.$$

Or $|c_n| \rho^n \leqslant M$ par hypothèse (cf. (6)), donc pour tout $z \in K$ la série (5) est majorée par la progression géométrique convergente $M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ et par suite converge uniformément sur K.

Nous avons prouvé la deuxième proposition du lemme, quant à la première, elle résulte de la deuxième, car tout point $z' \in U$ est contenu dans un disque $\{|z - a| < \rho'\}$, $|z' - a| < \rho' < \rho$, appartenant proprement à U. ◀

Théorème 3 (Abel *)). *Si une série entière* (5) *converge en un point* $z_0 \in \mathbf{C}$, *elle converge dans le disque* $U = \{z : |z - a| < |z_0 - a|\}$ *et converge absolument et uniformément sur tout sous-ensemble compact dans* U.

▶ La série (5) étant convergente en z_0, le terme général $c_n (z_0 - a)^n$ de la série numérique correspondante tend vers 0. Or toute série convergente est bornée, donc la condition du lemme est remplie. Ce lemme entraîne les deux propositions du théorème. ◀

Formule de Cauchy — Hadamard **). *Soit donnée une série entière* (5) *telle que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}, \tag{7}$$

où $0 \leqslant R \leqslant \infty$ (*on convient que* $1/0 = \infty$ *et* $1/\infty = 0$). *Alors la série* (5) *converge à l'intérieur du disque* $\{|z - a| < R\}$ *et diverge à l'extérieur.*

▶ On appelle limite supérieure d'une suite de réels α_n un nombre A tel que 1) il existe une suite partielle $\alpha_{n_k} \to A$, 2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\alpha_n < A + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Signalons que les cas $A = \pm\infty$ ne sont pas exclus: pour $A = +\infty$ la condition 2) n'a plus de sens; pour $A = -\infty$, le nombre $A + \varepsilon$ est remplacé dans cette condition par un nombre arbitraire (dans ce cas la condition 1) est automatiquement réalisée et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = -\infty$). On démontre en analyse que toute suite $\alpha_n \in \mathbf{R}$ possède une seule limite supérieure (finie ou infinie).

Soit $0 < R < \infty$; pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber un entier N tel que pour $n \geqslant N$ l'on ait $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon$ et par suite

$$|c_n (z-a)^n| < \left\{\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) |z-a|\right\}^n. \tag{8}$$

Si $|z-a| < R$, on peut choisir ε assez petit pour que $\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) \times |z-a| = q < 1$; on voit alors sur la formule (8) que pour $n \geqslant N$ les termes de la série (5) sont majorés par les termes de la progression géométrique q^n et par suite cette série converge pour $|z - a| < R$.

En vertu de la condition 1) de la définition de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $n_k \to \infty$ telle que

*) Ce théorème a été publié en 1826 par le mathématicien norvégien Nils Abel (1802-1829).

**) Cette formule est apparue en 1821 dans un travail de Cauchy; Cauchy n'a naturellement pas introduit la notion de limite supérieure, mais il a parlé de la «plus grande limite du nombre $\sqrt[n]{c_n}$». Cette formule a été prouvée par J. Hadamard en 1892 dans sa thèse de doctorat.

$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon$, donc

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > \left\{\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z-a|\right\}^{n_k}. \tag{9}$$

Si $|z-a| > R$, on peut choisir ε assez petit pour que $\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z-a| > 1$; on voit alors sur (9) que $|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > 1$, donc le terme général de la série (5) ne tend pas vers 0, i.e. cette série diverge pour $|z-a| > R$.

Les cas $R = 0$ et $R = \infty$ sont laissés au soin du lecteur. ◀

Définition. On appelle *domaine de convergence* de la série entière (5) le noyau ouvert (i.e. l'ensemble des points intérieurs) $\mathring{E}$ de l'ensemble E des points $z \in \mathbf{C}$ en lesquels converge cette série.

Théorème 4. *Le domaine de convergence de la série entière* (5) *est le disque* $\{|z-a| < R\}$, *où* R *est un nombre défini à partir de la formule de Cauchy-Hadamard* (7).

▶ De la proposition précédente il s'ensuit que l'ensemble E des points de convergence de la série (5) est le disque $\{|z-a| < R\}$ auquel il faut ajouter un ensemble (éventuellement vide) de points du cercle $\{|z-a| = R\}$. Donc le noyau ouvert $\mathring{E}$ est le disque $\{|z-a| < R\}$. ◀

Le disque (ouvert) dont l'existence vient d'être prouvée s'appelle *disque de convergence* de la série entière (5) et le nombre R, *rayon de convergence*.

Exemples. 1. D'après la formule de Cauchy — Hadamard, les rayons de convergence des séries

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (z/n)^n, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n \tag{10}$$

sont respectivement $R = \infty$, 1 et 0. Donc les disques de convergence respectifs sont le plan $\mathbf{C}$, le disque unitaire $\{|z| < 1\}$ et l'ensemble vide.

2. D'après la même formule, le disque de convergence des séries

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2 \tag{11}$$

est le disque unitaire $\{|z| < 1\}$. Mais les ensembles des points de convergence de ces trois séries sont différents. La série a) diverge sur le cercle $\{|z| = 1\}$, car son terme général ne tend par vers 0 pour $z = 1$. La série b) converge en certains points du cercle $\{|z| =$

$= 1\}$ (par exemple en $z = -1$). La série c) converge sur ce cercle, puisque pour tout z tel que $|z| = 1$ elle est majorée par la série numérique convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Prouvons maintenant que la somme d'une série entière est une fonction holomorphe.

Théorème 5. *La somme de la série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{12}$$

est holomorphe dans le disque de convergence de cette série.

▶ Nous admettrons que le rayon de convergence $R > 0$, sinon il n'y a rien à démontrer. Considérons la série formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1} = \varphi(z); \tag{13}$$

cette série converge ou diverge avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^n$, et puisque $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n\,|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, le rayon de convergence de la série (13) est aussi égal à R. La série (13) converge uniformément sur des sous-ensembles compacts du disque $U = \{\,|z-a| < R\}$, donc la fonction φ est continue dans U.

La série (13) peut être pour la même raison intégrée terme à terme sur la frontière de tout triangle $\Delta \Subset U$:

$$\int_{\partial\Delta} \varphi\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{\partial\Delta} (n-a)^{n-1}\, dz = 0$$

(d'après le théorème de Cauchy toutes les intégrales du second membre sont nulles, donc il en est de même de celle du premier membre). Par conséquent, on peut appliquer le théorème 3 du n° 16 et la remarque qui le suit et en vertu de laquelle la fonction

$$\int_{[a,\,z]} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[a,\,z]} (\zeta-a)^{n-1}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(on se sert de nouveau de la convergence uniforme) admet en tout point $z \in U$ une dérivée égale à $\varphi(z)$. Mais alors la fonction

$$f(z) = c_0 + \int_{[a,\,z]} \varphi(\zeta)\, d\xi$$

admet aussi en tout point $z \in U$ une dérivée $f'(z) = \varphi(z)$. ◀

21. Propriétés des fonctions holomorphes. Signalons quelques corollaires du théorème d'holomorphie de la somme d'une série entière.

Théorème 1. *La dérivée de toute fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ est holomorphe dans D.*

▶ Pour tout point $z_0 \in D$ construisons un disque $U = \{ |z - z_0| < R \} \subset D$. D'après le théorème 1 du n° 20 la fonction f se représente dans U par la somme d'une série entière. D'après le théorème 5 du n° 20 la dérivée $f' = \varphi$ se représente par une série convergente dans le même disque U. Donc on peut de nouveau appliquer le théorème 5 à φ et par suite φ est C-différentiable dans U. ◀

Ce théorème entraîne immédiatement la condition nécessaire d'existence de la primitive, évoquée au n° 16:

Corollaire. *Si une fonction continue f possède une primitive F dans un domaine D, elle est holomorphe dans D.*

En appliquant encore le théorème 1 on obtient le

Théorème 1'. *Toute fonction f holomorphe dans D possède des dérivées de tout ordre qui sont aussi holomorphes dans D.*

Le théorème suivant affirme l'unicité du développement d'une fonction en série entière au voisinage d'un point donné.

Théorème 2. *Si une fonction f se représente dans un disque $\{ |z - z_0| < R \}$ par la somme d'une série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

les coefficients de cette série sont définis de façon unique par les formules

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

▶ En posant $z = z_0$ dans (1), on trouve $f(z_0) = c_0$. En dérivant (1) terme à terme, soit

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 (z - z_0) + 3c_3 (z - z_0)^2 + \ldots,$$

et en posant $z = z_0$, on obtient $f'(z_0) = c_1$. La dérivation de (1) n fois:

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + c_1' (z - z_0) + c_2' (z - z_0)^2 + \ldots$$

(on omet d'écrire les expressions des coefficients) et la substitution $z = z_0$ nous donnent $n!c_n = f^{(n)}(z_0)$. ◀

Le théorème 2 est parfois formulé sous la forme suivante: *toute série entière convergente est la série de Taylor de sa somme.*

✱ Montrer que l'équation différentielle $dw/dz = P(z, w)$, où P est un polynôme des variables z et w, possède au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$ au plus une solution f holomorphe satisfaisant à la condition $f(a) = b$, où b est donné. ✱

La formule (2) permet de représenter les fonctions élémentaires par des séries entières. Par exemple,

$$\begin{gathered} e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots; \end{gathered} \tag{3}$$

ces développements sont valables sur $\mathbf{C}$ (leur rayon de convergence est $R = \infty$).

En comparant les valeurs de c_n calculées avec la formule (2) à celles calculées avec la formule (3) du n° 20, on obtient les expressions suivantes pour les dérivées des fonctions holomorphes:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Si f est une fonction holomorphe dans un domaine D et $G \Subset D$, un domaine limité par un nombre fini de courbes continues et tel que $z_0 \in G$, on peut, en se servant de l'invariance de l'intégrale par une déformation homotope du contour, remplacer γ_r par le contour orienté ∂G dans la dernière formule. On obtient les formules de Cauchy pour les dérivées des fonctions holomorphes:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

(on écrit z au lieu de z_0 et on admet que $z \in G$).

Ces formules s'obtiennent à partir de la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

par une dérivation par rapport au paramètre z sous le signe d'intégration. Ce raisonnement indirect nous évite de démontrer la légitimité de cette dérivation.

Théorème 3 (Moréra *)). *Si une fonction f est continue dans un domaine D et son intégrale le long du contour $\partial\Delta$ de tout triangle $\Delta \Subset D$ est nulle, alors $f \in \mathcal{O}(D)$.*

---

*) Jacinto Moréra, mathématicien italien (1856-1909). A prouvé ce théorème en 1889.

▶ Pour tout point $a \in D$ construisons le disque $U = \{ | z - a | < r\} \subset D$. La fonction $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta$ est holomorphe dans U et $F'(z) = f(z)$ en tout point $z \in U$ (cf. remarque suivant le théorème 3 du n° 16). D'après le théorème 1 il s'ensuit que f est holomorphe dans U. Ce qui prouve que f est holomorphe en chaque point $a \in D$. ◀

Remarque. Le théorème de Moréra est réciproque du théorème de Cauchy dans la formulation du n° 16, à savoir que l'intégrale d'une fonction holomorphe dans un domaine D le long du contour d'un triangle quelconque $\Delta \Subset D$ est nulle. Mais le théorème de Moréra contient une condition supplémentaire de continuité de la fonction f. Cette condition est essentielle : par exemple, l'intégrale d'une fonction partout nulle dans $\mathbf{C}$ sauf en un point où elle est égale à 1, prise le long du contour d'un triangle quelconque est nulle, et pourtant cette fonction n'est pas holomorphe, car elle n'est même pas continue.

Le théorème de Moréra n'impose aucune condition de dérivabilité : les fonctions qui remplissent les conditions de ce théorème peuvent être appelées *solutions généralisées* du système de Cauchy — Riemann. Le théorème affirme que toute solution généralisée de ce système est une solution classique, i.e. possède des dérivées partielles continues satisfaisant à ce système.

✱ Soit f une fonction continue dans le disque $U = \{ | z | < 1\}$ et holomorphe partout dans U sauf sur le diamètre $]-1, 1[$: montrer que $f \in \mathcal{O}(U)$. ✱

Enumérons en conclusion les résultats relatifs à l'équivalence des diverses définitions de l'holomorphie d'une fonction en un point :

Théorème 4. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(R) *la fonction f est* $\mathbf{C}$*-différentiable dans un voisinage U d'un point a ;*

(C) *la fonction f est continue dans un voisinage U d'un point a et son intégrale le long de la frontière $\partial\Delta$ de tout triangle $\Delta \Subset U$ est nulle ;*

(W) *la fonction f se développe en une série entière convergente dans un voisinage U d'un point a.*

Ces trois propositions traduisent trois conceptions dans l'élaboration de la théorie des fonctions holomorphes. En général, une fonction est appelée respectivement Riemann-holomorphe, Cauchy-holomorphe ou Weierstrass-holomorphe *) selon qu'elle satisfait à la condition (R), (C) ou (W).

---

*) Ces dénominations expriment en gros le cours réel des faits (cf. page 100 et plus bas pages 150 et 215).

L'implication (R) $\Rightarrow$ (C) a été prouvée dans le théorème de Cauchy (n° 16), l'implication (C) $\Rightarrow$ (W), dans le théorème de Taylor, et l'implication (W) $\Rightarrow$ (R), dans le théorème d'holomorphie de la somme d'une série entière.

Faisons enfin une

Remarque. On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f sont holomorphe dans un disque $\{ | z - a | < R \}$ est qu'elle se développe en une série entière convergente dans ce disque. Mais la convergence de cette série aux points frontières du disque de convergence n'est pas liée à l'holomorphie de la somme de cette série en ces points. On peut s'en assurer sur des exemples simples.

En effet, la série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{6}$$

converge dans le disque $\{ | z | < 1 \}$. Elle diverge sur le cercle $\{ | z | = 1 \}$, car son terme général ne tend pas vers 0. Or la somme de cette série est holomorphe en tous les points du cercle sauf en $z = 1$. D'autre part, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = f(z) \tag{7}$$

converge en tous les points du cercle du disque de convergence $\{ | z | = 1 \}$, car elle est majorée par la série numérique convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Or sa somme f ne peut être holomorphe au point $z = 1$, car la dérivée $f'(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ croît indéfiniment lorsque z tend vers 1 le long de l'axe réel.

22. Théorème d'unicité. Définition 1. On appelle *zéro* d'une fonction f tout point $a \in \overline{\mathbf{C}}$ en lequel cette fonction s'annule, i.e. toute racine de l'équation $f(z) = 0$.

En analyse réelle, les zéros d'une fonction dérivable peuvent posséder des points d'accumulation en lesquels cette fonction reste dérivable (c'est le cas par exemple du point $x = 0$ pour la fonction $f(x) = x^2 \sin(1/x)$). En analyse complexe, la situation se présente d'une manière différente : les zéros d'une fonction holomorphe sont nécessairement isolés, ils ne peuvent posséder des points d'accumula-

tion que sur la frontière du domaine dans lequel cette fonction est holomorphe *). Ce fait est traduit par le

Théorème 1. *Si un point a est un zéro d'une fonction f holomorphe en a et non identiquement nulle dans aucun voisinage de a, il existe un entier naturel n tel que*

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \tag{1}$$

où la fonction φ est holomorphe en a et non nulle dans un voisinage de a.

▶ En effet, la fonction f se développe en série entière dans un voisinage de a. Le terme constant de cette série est nul puisque $f(a) = 0$, mais les autres coefficients ne peuvent être tous nuls, car on aurait $f \equiv 0$ dans un voisinage de a. Il existe donc un coefficient non nul de rang inférieur, rang que l'on désignera par n pour fixer les idées, et le développement s'écrit

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \quad c_n \neq 0. \tag{2}$$

Soit

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots$$

Cette série étant convergente dans un voisinage de a, sa somme $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans ce voisinage. Puisque $\varphi(a) = c_n \neq 0$ on a $\varphi \neq 0$ dans un voisinage de a en vertu de la continuité de φ. ◀

Théorème 2 (d'unicité **)). *Si deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D)$ sont confondues sur un ensemble E possédant au moins un point d'accumulation $a \in D$, alors $f_1 = f_2$ partout dans D.*

▶ La fonction $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(D)$; il faut montrer que $f \equiv 0$ dans D, i.e. que l'ensemble $F = \{z \in D : f(z) = 0\} \supset E$ est confondu avec D. Le point d'accumulation a est un zéro de f (en vertu de la continuité de cette dernière). D'après le théorème 1 la fonction $f \equiv 0$ dans un voisinage de a, sinon ce point ne serait pas un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de f.

Donc le noyau ouvert $\mathring{F}$ de l'ensemble F (i.e. l'ensemble de ses points intérieurs) n'est pas vide : il contient le point a. Par construction $\mathring{F}$ est ouvert, mais il est aussi fermé (pour la topologie relative du domaine D). En effet, si $b \in D$ est un point d'accumulation de $\mathring{F}$, la fonction $f \equiv 0$ dans un voisinage du point b en vertu du théorème 1, autrement dit, $b \in \mathring{F}$. Le domaine D étant connexe par définition, le théorème 2 du n° 4 nous dit que $\mathring{F} = D$. ◀

*) Signalons que la fonction $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ n'est plus holomorphe en $z = 0$, car lorsque $z \to 0$ suivant une direction (par exemple, suivant l'axe imaginaire), $\sin(1/z)$ tend vers l'infini plus vite que toute puissance de $1/z$.

**) Ce théorème remonte à B. Riemann (1851), cf. plus bas page 215.

Ce théorème met aussi l'accent sur la différence fondamentale qui existe entre la notion d'holomorphie d'une fonction et la notion de **R**-différentiabilité. En effet, deux fonctions d'une variable réelle, même indéfiniment dérivables, peuvent être confondues sur une partie du domaine de définition sans être identiquement confondues. Mais le théorème prouvé nous dit que deux fonctions holomorphes confondues sur un ensemble quelconque possédant un point d'accumulation appartenant au domaine où elles sont holomorphes (par exemple, sur un petit disque ou un arc appartenant à ce domaine) sont identiquement confondues sur ce domaine.

✻ Montrer que si f est holomorphe dans un voisinage de $z = 0$, il existe un entier naturel n tel que $f(1/n) \neq (-1)^n/n^3$. ✻

Remarquons encore que le théorème d'unicité nous permet de simplifier légèrement l'énoncé du théorème 1. Plus exactement, la condition que la fonction f n'est identiquement nulle dans aucun voisinage du point a peut être remplacée par la condition qu'elle n'est nulle part identiquement nulle (ces deux conditions sont confondues d'après le théorème d'unicité).

Le théorème 1 nous apprend que les fonctions holomorphes s'annulent comme les puissances entières de $(z - a)$.

Définition 2. On appelle *ordre* ou *multiplicité d'un zéro* $a \in \mathbf{C}$ d'une fonction f holomorphe en a l'ordre de la première dérivée $f^{(k)}(a)$ non nulle. En d'autres termes, un point a est un zéro d'ordre n de f si

$$f(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{3}$$

Sur la formule des coefficients $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ du développement de Taylor on voit que l'ordre du zéro a est égal au rang du premier coefficient non nul du développement taylorien de cette fonction au point a, c'est-à-dire au nombre n qui intervient dans le théorème 1. Le théorème d'unicité indique que les fonctions holomorphes non identiquement nulles ne peuvent présenter de zéro d'ordre infini.

De même que pour les polynômes on peut définir l'ordre d'un zéro à l'aide de la divisibilité. Plus exactement, on a le

Théorème 3. *L'ordre d'un zéro $a \in \mathbf{C}$ d'une fonction holomorphe f est égal à la plus grande puissance $(z - a)^k$ par laquelle f est « divisible » en ce sens que le quotient $\frac{f(z)}{(z-a)^k}$ (prolongé par continuité au point a) est une fonction holomorphe en a.*

▶ Désignons par n l'ordre du zéro a et par N, la plus grande puissance du binôme $(z - a)$ par laquelle est divisible f. On voit sur la formule (1) que f est divisible par toute puissance $k \leqslant n$ de

$(z-a)$:

$$\frac{f(z)}{(z-a)^k}=(z-a)^{n-k}\varphi(z),$$

donc $N \geqslant n$. Supposons que f est divisible par $(z-a)^N$, i.e. que le quotient

$$\frac{f(z)}{(z-a)^N}=\psi(z)$$

est une fonction holomorphe en a. En développant ψ en série entière de $(z-a)$, on trouve que le développement taylorien de f au voisinage de a commence par une puissance $\geqslant N$. Donc $n \geqslant N$ et en combinant avec l'inégalité ci-dessus on obtient $N=n$.◀

Exemple. La fonction $f(z)=\sin z-z$ présente un zéro d'ordre trois en $z=0$. En effet, $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0) \neq 0$. Ceci ressort aussi du développement

$$f(z)=\sin z-z=-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots$$

Remarque. Soit f une fonction holomorphe et nulle au point à l'infini. Il est naturel d'appeler *ordre* de ce zéro l'ordre du zéro de la fonction $\varphi(z)=f(1/z)$ au point $z=0$. Le théorème prouvé reste en vigueur pour le point $a=\infty$ si la division par $(z-a)^k$ est remplacée par la multiplication par z^k $(k=1, 2, \ldots)$.

La notion d'ordre d'un zéro peut être généralisée aux A-points d'une fonction holomorphe. On appelle *A-point* d'une fonction f un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$ tel que $f(a)=A$. On appelle *ordre* d'un A-point a d'une fonction f holomorphe en a l'ordre du zéro a de la fonction $f(z)-A$.

23. Théorème de Weierstrass et de Runge. On sait qu'en analyse réelle la dérivation terme à terme d'une série implique la convergence de cette série en un point quelconque et la convergence uniforme de la série des dérivées. En analyse complexe la situation est plus simple. On a le

Théorème 1 (Weierstrass *)). *Si une série*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

de fonctions holomorphes dans un domaine D converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de D, alors

1) *la somme f de cette série est holomorphe dans D;*

2) *la série f est dérivable terme à terme en tout point de D autant de fois qu'on le veut.*

---

*) Ce théorème a été prouvé par C. Weierstrass en 1841 dans un cahier de Munich (cf. plus bas page 121), mais n'a été publié qu'en 1894.

▶ Soit $a \in D$ un point arbitraire et soit $U = \{ |z - a| < r\} \Subset D$. La série (1) étant par hypothèse convergente uniformément sur U et ses termes continus dans U, sa somme f est continue dans U. Désignons par γ le bord orienté d'un triangle $\Delta \subset U$. La série (1) étant uniformément convergente sur γ, on peut l'intégrer terme à terme sur γ:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n\,\mathrm{d}z.$$

Les fonctions f_n étant holomorphes dans U, les intégrales du second membre sont toutes nulles d'après le théorème de Cauchy. Donc l'intégrale de f sur γ est nulle aussi. Le théorème de Moréra nous dit que f est holomorphe dans U. Ce qui prouve la proposition 1).

Pour prouver 2) prenons un point arbitraire $a \in D$; construisons un disque $U - \{ |z - a| < r\} \Subset D$ et désignons par $\gamma_r = \partial U$ le cercle $\{ |z - a| = r\}$. La formule de Cauchy pour les dérivées nous donne

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-a)^{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

La série

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-a)^{k+1}} \tag{3}$$

étant uniformément convergente sur γ_r (elle diffère de (1) d'un facteur dont le module est égal à $r^{\frac{1}{k+1}}$ sur γ_r), on peut la porter dans l'intégrale (2). L'application de la formule (2) aux fonctions f_n nous donne

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(z)\,\mathrm{d}z}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(a).$$

Ce qui prouve 2). ◀

✱ Expliquer pourquoi la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 z}{n^2}$ n'est pas dérivable terme à terme. ✱

Les séries formées avec les polynômes jouent un rôle particulier en analyse. Le théorème de Weierstrass nous permet d'affirmer que si une série de polynômes

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \tag{4}$$

converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact d'un domaine D, sa somme f est holomorphe dans D.

En pratique c'est le problème inverse qui est important, c'est-à-dire le problème qui consiste à approcher une fonction arbitraire, holomorphe dans un domaine D par une suite de polynômes, cette approximation devant en général être uniforme sur tout sous-ensemble compact de D. Voici la position exacte de ce problème.

Soient donnés un domaine $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ et une fonction $f \in \mathcal{O}(D)$. On demande de construire pour tout ensemble $K \Subset D$ et tout $\varepsilon > 0$ un polynôme $P(z)$ tel que

$$\| f - P \|_K = \sup_{z \in K} | f(z) - P(z) | < \varepsilon. \tag{5}$$

Ce problème revient à construire une série de polynômes $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ qui converge uniformément vers f sur tout sous-ensemble compact du domaine D. En effet, les sommes partielles de rang assez élevé satisfont visiblement aux conditions du problème. Pour prouver la réciproque on se servira du lemme d'exhaustion compacte:

Lemme. *Pour tout domaine $D \subset \mathbf{C}$ on peut construire une exhaustion compacte, i.e. une suite d'ensembles K_n fermés (pour la topologie de $\overline{\mathbf{C}}$) tels que*

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots, \tag{6}$$

de plus tous les $K_n \subset D$ et tout point z de D appartient à tous les K_n à partir d'un certain n $\left(D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$.

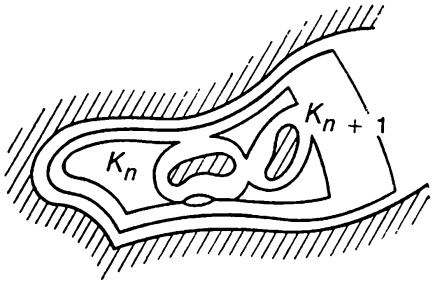

Fig. 43

▶ Pour K_n on peut prendre les ensembles

$$K_n = \{z \in D : | z | \leqslant n, \quad \rho(z, \partial D) \geqslant 1/n\},$$

où $\rho(z, \partial D)$ est la distance de z à la frontière du domaine D et $n = 1, 2, \ldots$ (fig. 43). ◀

Remarque. Fixons un point $z_0 \in D$ et désignons par G_n la composante connexe du noyau $\mathring{K}_n$, contenant z_0 (ces composantes ne sont pas vides à partir d'un certain $n = n_0$). On obtient alors une exhaustion compacte de D par les domaines

$$G_1 \Subset G_2 \Subset \ldots \Subset G_n \Subset \ldots, \tag{7}$$

et de plus tous les $G_n \Subset D$ et $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

La fonction $\rho(z, \partial D)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz, i.e.

$$|\rho(z', \partial D) - \rho(z'', \partial D)| \leqslant |z' - z''|, \quad \forall z', z'' \in D,$$

les contours des domaines G_n sont constitués par un nombre fini de courbes rectifiables. Bien plus, en recouvrant $\bar{G}_n$ par un nombre fini de cercles de rayons assez petits, on peut construire une suite de domaines G'_n de bords différentiables par morceaux qui forme aussi une exhaustion compacte de D.

Remarquons enfin que si le domaine D est simplement connexe, les domaines G_n de son exhaustion compacte peuvent être considérés comme simplement connexes.

Revenons maintenant à nos raisonnements. En se servant du lemme on démontre sans peine que si le problème d'approximation uniforme par des polynômes est soluble dans un domaine D, on peut représenter dans D toute fonction $f \in \mathcal{O}(D)$ par une série de polynômes uniformément convergente sur chaque $K \Subset D$. En effet, considérons une exhaustion compacte de D ($D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$) et comme dans le lemme construisons une suite de polynômes P_n tels que

$$\| f - P_n \|_{K_n} \leqslant 1/2^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

La série

$$P_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(z) - P_n(z)] \tag{9}$$

est la série cherchée. En effet, sa n-ième somme partielle est égale à P_n, donc elle converge uniformément vers f sur chaque $K \Subset D$ en vertu de (8) (tout $K \Subset D$ appartient à tous les K_n à partir d'un certain rang et par suite $\| f - P_n \|_K < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ si n est assez grand).

Si le domaine D est un disque $U = \{ |z - a| < R \}$, la solution du problème posé est donnée par des polynômes de Taylor de la fonction f au voisinage du point a:

$$P_n(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{10}$$

En effet, on sait que f se représente dans U par une série entière qui de plus converge uniformément sur des sous-ensembles compacts de U.

Mais les séries entières ne convergent que dans des disques, donc les polynômes de Taylor ne conviennent pas pour l'approximation des fonctions dans des domaines de forme plus générale. La solution de l'approximation des fonctions dans des domaines simplement connexes est donnée par le

Théorème 2 (Runge *)). *Soient f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \in \mathbf{C}$ et K un sous-ensemble compact de D. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que*

$$\| f - P \|_K < \varepsilon. \tag{11}$$

▶ Construisons un domaine G simplement connexe à bord $\partial G = \gamma$ différentiable par morceaux, tel que $K \Subset G \Subset D$ (cf. remarque suivant le lemme). Pour tout point $z \in K$, la formule intégrale de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{12}$$

Montrons tout d'abord que f peut être approchée sur K par des fonctions rationnelles. A cet effet subdivisons γ à l'aide des points ζ_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) pris dans l'ordre de parcours de γ, désignons par γ_ν la portion comprise entre ζ_ν et $\zeta_{\nu+1}$, posons $\Delta\zeta_\nu = \zeta_{\nu+1} - \zeta_\nu$ (on admet que $\zeta_{N+1} = \zeta_1$) et considérons la fonction rationnelle

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z} \Delta\zeta_\nu. \tag{13}$$

On a de toute évidence

$$f(z) - g(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{N} \int_{\gamma_\nu} \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z} \right\} d\zeta. \tag{14}$$

La fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ des variables complexes z et ζ est uniformément continue sur l'ensemble compact $K \times \gamma$ de l'espace à quatre dimensions (z, ζ)**), car continue sur cet ensemble. On peut donc pour tout $\varepsilon > 0$ choisir γ_ν assez petits pour que $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z} \right| < \varepsilon$ pour tout $\zeta \in \gamma_\nu$ et tout $z \in K$. En portant cette majoration dans (14), on obtient

$$\| f - g \|_K \leqslant \frac{1}{2\pi} \varepsilon\, |\gamma|,$$

où $|\gamma|$ est la longueur de γ. Ce qui prouve la possibilité d'une approximation de f par des fonctions rationnelles de la forme (13).

Reste à prouver que toute fonction de la forme (13) peut être uniformément approchée sur K par des polynômes. Il suffit pour cela

*) Ce théorème a été prouvé en 1885 par le mathématicien allemand Carl Runge (1856-1927).

**) Par $A \times B$ on désigne le produit des ensembles A et B, i.e. l'ensemble de tous les couples (a, b), où $a \in A$ et $b \in B$.

de montrer que toute fonction $1/(\zeta_\nu - z)$, où $\zeta_\nu \in \partial G$ est un point arbitraire, est uniformément approchable par des polynômes sur K. On se propose de démontrer plus: soit G' un domaine tel que $K \Subset G' \Subset G$ et supposons que le complémentaire $\Delta = \bar{\mathbf{C}} \setminus \bar{G}'$ est connexe *); alors l'ensemble

$$E = \\ = \{a \in \Delta : \frac{1}{a-z} \text{ s'approxime uniformément sur } K \text{ par des polynômes } \}$$

est confondu avec Δ.

L'ensemble E n'est pas vide, car il contient l'extérieur du disque $\{ |z| < R\}$ qui renferme K. En effet, pour tout a, $|a| > R$, la fonction $1/(a - z)$ est holomorphe dans $\{ |z| \leqslant R\}$, donc elle s'approxime uniformément dans ce disque (donc sur K) par ses polynômes de Taylor au voisinage de $z = 0$. L'ensemble E est fermé (pour la topologie de Δ), car si une suite de points $a_n \in E$ converge vers un point $a \in \Delta$, la suite de fonctions $1/(a_n - z)$ converge uniformément sur K vers $1/(a - z)$ (pour $a = \infty$ il faut remplacer cette suite par 0), et puisque les $1/(a_n - z)$ s'approximent tous uniformément sur K par des polynômes, il en est de même de $1/(a - z)$. Mais E est aussi ouvert: soient $a_0 \in E$ et a un point quelconque du disque $\| a - a_0 \| < \inf\limits_{z \in K} | a_0 - z |$; on a

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{a_0 - a}{a_0 - z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_0 - a)^n}{(a_0 - z)^{n+1}} ,$$

de plus cette série converge uniformément sur K. Puisque $1/(a_0 - z)$, donc $1/(a_0 - z)$, s'approximent sur K par des polynômes, il en est de même des sommes partielles de cette série, i.e. $a \in E$.

Donc E n'est pas vide et est un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé de l'ensemble connexe Δ; d'après le théorème 2 du n°4, on a $E = \Delta$. ◀

Remarque. On démontre par la même méthode que toute fonction f holomorphe sur un ensemble Ω ouvert (pas nécessairement connexe) à complémentaire connexe s'approxime uniformément par des polynômes sur chaque $K \Subset \Omega$. (La deuxième partie de la démonstration ne subit aucun changement; dans la première partie il faut construire un ensemble ouvert G, $K \Subset G \Subset \Omega$, de bord $\gamma = \partial G$ formé d'un nombre fini de courbes différentiables par morceaux et remarquer que la formule (12) se généralise à ce cas.)

---

*) On peut construire un tel domaine G' en s'appuyant sur le lemme prouvé et la simple connexité du domaine G.

Par ailleurs, les fonctions holomorphes ne s'approximent pas en général par des polynômes dans des domaines multiplement connexes. La cause de ce fait sera élucidée plus bas (cf. n° 36).

✱ Montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ ne peut être uniformément approchée par des polynômes sur le cercle $\{ |z| = 1 \}$. ✱

§ 7. Séries de Laurent et points singuliers

Les séries de Taylor sont favorables à la représentation en séries entières des fonctions holomorphes dans un disque. Nous envisageons ici des séries plus générales de puissances positives et négatives de $(z - a)$. Ces séries représentent des fonctions holomorphes dans des couronnes circulaires

$$V = \{z \in \mathbf{C} : r < |z - a| < R\}, \qquad r \geqslant 0, \qquad R \leqslant \infty.$$

Les développements sont particulièrement importants dans les couronnes dont les cercles intérieurs sont de rayons nuls, i.e. dans les voisinages pointés. Ces développements permettent d'étudier les fonctions holomorphes au voisinage des points où l'holomorphie est violée (les points singuiliers).

24. Séries de Laurent. Théorème 1 (Laurent *)). *Toute fonction f holomorphe dans une couronne $V = \{r < |z - a| < R\}$ peut être représentée dans V par la somme d'une série entière*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

dont les coefficients se définissent à l'aide des formules

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=\rho\}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

où $r < \rho < R$.

▶ Fixons un point arbitraire $z \in V$ et construisons une couronne $V' = \{\zeta : r' < |\zeta - a| < R'\}$ telle que $z \in V' \Subset V$ (fig. 44). La formule intégrale de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3}$$

où les cercles $\Gamma' = \{|\zeta - a| = R'\}$ et $\gamma' = \{|\zeta - a| = r'\}$ sont orientés dans le sens direct.

---

*) Ce théorème a été prouvé par Weierstrass dans ses cahiers de Munich (1841) qui n'ont été publiés qu'en 1894. Il a été publié auparavant par l'ingénieur militaire et mathématicien français Pierre Alphonse Laurent (1813-1854).

Pour tout $\zeta \in \Gamma'$, on a $\left|\frac{z-a}{\zeta-z}\right| = q < 1$, donc la progression géométrique

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

converge absolument et uniformément en ζ sur Γ'. En la multipliant par la fonction bornée $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ (ce qui ne viole pas la convergence uniforme) et en intégrant terme à terme sur Γ', on obtient

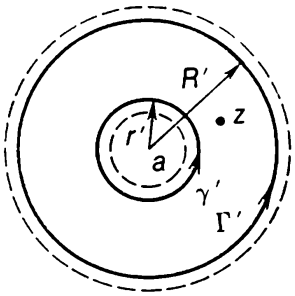

Fig. 44

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{4}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n-1}} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{5}$$

La deuxième intégrale de la formule (3) doit être décomposée d'une autre manière. Pour tout $\zeta \in \gamma'$, on a $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = q_1 < 1$, donc on obtient une progression géométrique absolument et uniformément convergente sur γ' en procédant comme suit:

$$-\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

En multipliant de nouveau par la fonction bornée $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ et en intégrant terme à terme le long de γ', on trouve

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}, \tag{6}$$

où

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

Dans les formules (6) et (7) remplaçons maintenant l'indice n qui prend les valeurs 1, 2, . . . par l'indice $-n$ qui prend les va-

leurs -1, -2, ... (ceci ne change rien) et posons *)

$$c_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1}\, d\zeta \quad (n = -1, -2, \ldots), \tag{8}$$

le développement (6) devient alors

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \tag{6'}$$

Portons maintenant (4) et (6′) dans (3); on obtient le développement (1) annoncé : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, où cette série est la réunion des séries (4) et (6′). Reste à remarquer que d'après le théorème de Cauchy sur l'homotopie (n° 17), on peut remplacer dans les formules (5) et (8) les cercles Γ' et γ' par n'importe quel cercle $\{ | \zeta - a | = \rho \}$, où $r < \rho < R$ et ces formules prennent alors la forme (2). ◀

Définition. La série (1) dont les coefficients sont définis par les formules (2) s'appelle *série de Laurent* de la fonction f dans la couronne V. L'ensemble des puissances positives s'appelle *partie régulière* de cette série, celui des puissances négatives, *partie principale* (l'adéquation de ces dénominations apparaîtra au numéro suivant) de la série.

Considérons les propriétés fondamentales des séries entières de $z - a$. Comme plus haut définissons une telle série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{9}$$

comme la réunion des séries

$$(\Sigma_1) : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{et} \quad (\Sigma_2) : \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \tag{10}$$

La série (Σ_1) est une série entière ordinaire ; son domaine de convergence est le disque $\{ | z - a | < R \}$, où le nombre R est défini par la formule de Cauchy — Hadamard

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{11}$$

La série (Σ_2) est une série entière de $Z = 1/(z-a)$:

$$(\Sigma_2) : \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} Z^n. \tag{12}$$

*) Signalons que nous n'avons pas encore fait usage des coefficients c_n à indices négatifs.

Donc, son domaine de convergence est l'extérieur du disque $\{|z-a|>r\}$, où

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|} \tag{13}$$

en vertu de la formule de Cauchy — Hadamard appliquée à la série (12). Le nombre R n'est pas nécessairement plus grand que r, donc le domaine de convergence de la série (9) peut être vide. Mais si $r<R$, le domaine de convergence de la série (9) sera la couronne $V=\{r<|z-a|<R\}$. Remarquons que l'ensemble des points de convergence de la série (9) peut différer de V d'un ensemble de points appartenant à ∂V.

D'après le théorème d'Abel la série (9) converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de V, donc sa somme est holomorphe dans V en vertu du théorème de Weierstrass.

De ces deux remarques il s'ensuit immédiatement le théorème d'unicité du développement d'une fonction en série de puissances positives et négatives dans V:

Théorème 2. *Si une fonction f se représente par une série* (1) *dans la couronne $V=\{r<|z-a|<R\}$, les coefficients de cette série sont définis par les formules* (2).

▶ Considérons le cercle $\gamma=\{|z-a|=\rho\}$, $r<\rho<R$. La série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k=f(z)$$

converge uniformément sur γ et cette propriété est préservée par la multiplication des deux membres par une puissance quelconque $(z-a)^{-n-1}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1}=\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

L'intégration terme à terme de cette série sur γ nous donne

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\int_\gamma (z-a)^{k-n-1}\,dz=\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

En se servant du fait que, d'après la propriété d'orthogonalité des puissances (n° 15), toutes les intégrales du premier membre sont nulles à l'exception d'une seule, celle pour laquelle $k=n$, qui est

égale à $2\pi i$, on obtient

$$2\pi i c_n = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

ce qui est confondu avec (2). ◀

Le théorème 2 peut s'énoncer de la manière suivante: toute série convergente de puissances positives et négatives de $z-a$ est la série de Laurent de sa somme.

Les formules (2) des coefficients de la série de Laurent sont d'un usage peu fréquent en pratique, car elles impliquent un calcul d'intégrales. D'après le théorème d'unicité prouvé, on peut se servir de tout procédé licite pour obtenir des développements de Laurent: de tels procédés conduisent au résultat escompté.

Exemple. La fonction $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans les couronnes $V_1=\{0<|z|<1\}$, $V_2=\{1<|z|<2\}$ et $V_3=\{2<|z|<\infty\}$. Pour développer cette fonction en séries de Laurent, mettons-la sous la forme $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$. Dans la couronne V_1 ces termes se représentent par les progressions géométriques

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \text{ (converge pour } |z|<2), \\ -\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ (converge pour } |z|<1). \end{aligned} \tag{14}$$

La fonction se représente donc dans V_1 par la série

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

qui ne contient que des puissances positives (série de Taylor).

Dans la couronne V_2, le premier développement (14) continue de converger, quant au second, il faut le remplacer par le développement (convergent pour $|z|>1$)

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n.$$

Dans cette couronne la fonction f se représente donc par la série de Laurent

$$f(z) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n. \tag{15}$$

Dans la couronne V_3 la série (15) continue de converger, quant à la première série (14), il faut la remplacer par la série (convergente pour $|z| > 2$)

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Donc dans V_3

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

Signalons que les coefficients de la série de Laurent sont définis par les formules (2), qui pour $n \geqslant 0$ sont confondues avec les formules intégrales des coefficients de la série de Taylor *). En reprenant *ad litteram* les raisonnements qui nous ont servi dans le n° 20 à établir les inégalités de Cauchy pour les coefficients de la série de Taylor, on obtient les

Inégalités de Cauchy (pour les coefficients de la série de Laurent). *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $V = \{r < |z-a| < R\}$ et dont le module est inférieur à une constante M sur un cercle $\gamma_\rho = \{|z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$. Alors les coefficients de la série de Laurent de la fonction f satisfont dans V aux inégalités*

$$|c_n| \leqslant M/\rho^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{16}$$

Signalons en conclusion le lien existant entre les séries de Laurent et celles de Fourier. On appelle *série de Fourier* d'une fonction φ intégrale sur l'intervalle $[0, 2\pi] \subset \mathbf{R}$ la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \tag{17}$$

*) Mais les coefficients de la série de Laurent ne peuvent être représentés par la formule différentielle $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ ne serait-ce que parce que f n'est généralement pas définie pour $z = a$.

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{18}$$

(on admet que $b_0 = 0$). Cette série peut être écrite sous forme complexe. Utilisons à cet effet les formules d'Euler $\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$, $\sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$. En les portant dans (17), on trouve

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{a} e^{-int} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

où

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} \, dt \quad (n = 0, 1, \ldots),$$
$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} \, dt \quad (n = -1, -2, \ldots).$$

La série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \tag{19}$$

de coefficients

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} \, dt \tag{20}$$

est la forme complexe de la série de Fourier de la fonction φ.

Posons maintenant $e^{it} = z$ et $\varphi(t) = f(e^{it}) = f(z)$; la série (19) devient alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{21}$$

et ses coefficients sont

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) \frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{22}$$

Donc la forme complexe de *la série de Fourier de la fonction* $\varphi(t)$, $i \in [0, 2\pi]$ *est la série de Laurent de la fonction* $f(z) = \varphi(t)$, *où* $z = e^{it}$, *sur le cercle unité* $\{ |z| = 1 \}$.

Il est évident que, réciproquement, la série de Laurent d'une fonction $f(z)$ sur le cercle unité est la série de Fourier de la fonction $f(e^{it}) = \varphi(t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Signalons que d'une façon générale, même si la série de Fourier converge vers la fonction φ en chaque point de l'intervalle $[0, 2\pi]$, il se peut que $R = r = 1$ pour la série de Laurent correspondante, de sorte que le domaine de convergence de cette série est vide. Ce domaine de convergence n'est pas vide sous des conditions très restrictives sur la fonction φ.

Exemple. Soit $\varphi(t) = \dfrac{1-z^2}{1-2a\cos t+a^2}$ $(|a| < 1)$. Posons $e^{it} = z$ et trouvons la fonction correspondante :

$$f(z) = \frac{1-z^2}{2i\left\{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right\}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right);$$

cette fonction est holomorphe dans la couronne $\{ |a| < |z| < 1/|a| \}$. Comme dans l'exemple précédent, développons-la en série de Laurent dans cette couronne :

$$f(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

En remplaçant de nouveau $z = e^{it}$, on obtient la série de Fourier de la fonction φ :

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt.$$

25. Points singuliers isolés. Etudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 1. On dit qu'un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$ est un *point singulier isolé* d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de a (i.e. un ensemble $\{0 < |z-a| < r\}$ si a est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $a = \infty$) dans lequel f est holomorphe.

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point.

Définition 2. On dit qu'un point singulier a d'une fonction f est

(I) *artificiel* ou *éliminable* si $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A < \infty$;

(II) un *pôle* si $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

(III) *essentiel* si f ne possède ni une limite finie, ni une limite infinie lorsque $z \to a$.

Exemples.

1. Les trois types de points singuliers existent.

Pour les fonctions z et $(\sin z)/z$, le point $z = 0$ est un point singulier éliminable (pour la deuxième fonction ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

d'où il s'ensuit que $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$).

Les fonctions $1/z^n$, où $n > 0$ est un entier, présentent un pôle au point $z = 0$.

Le point $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $e^{1/z}$, car lorsque, par exemple, $z = x$ tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche, à 0) ; la fonction $e^{1/z} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$ n'admet pas de limite lorsque $z = iy$ tend vers 0 suivant l'axe imaginaire.

Il peut de toute évidence exister des points singuliers non isolés. Par exemple, la fonction $1/\sin(\pi/z)$ présente des pôles en $z = 1/n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), donc $z = 0$ est un point singulier non isolé qui est un point d'accumulation des pôles.

2. La fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots \tag{1}$$

présente des points singuliers de nature plus compliquée. D'après la formule de Cauchy — Hadamard, la série (1) converge dans le disque $\{ |z| < 1 \}$ et par suite la fonction f est holomorphe dans ce disque. Elle tend vers l'infini *) lorsque z tend vers 1 suivant l'axe réel, donc le point $z = 1$ est un point singulier de f. Or

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + \ldots = f(z) - z^2,$$

*) Cette proposition ne résulte pas de la divergence de (1) pour $z = 1$ (qu'on se rappelle la remarque de la fin du n° 21) et doit être spécialement démontrée: pour $z = x$, $0 < x < 1$, on a $f(x) > \sum\limits_{n=0}^{N} x^{2^n}$, où N est un entier naturel arbitraire; lorsque $x \to 1$, la somme du second membre tend vers $N + 1$, donc on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que $f(x) > N$ pour $1 - \delta < x < 1$ et par suite $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \infty$.

donc $f(z) = z^2 + f(z^2)$ tend aussi vers l'infini lorsque z tend vers -1 suivant un rayon du disque. De façon analogue, $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, donc $f \to \infty$ lorsque $z \to \pm i$ suivant un rayon du disque. D'une façon générale,

$$f(z) = z^2 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

pour tout n naturel, donc $f \to \infty$ lorsque z tend suivant un rayon vers tout point « dyadique » $z = e^{k \cdot 2\pi i/2^n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ du cercle. L'ensemble des points « dyadiques » étant partout dense sur le cercle $\{ |z| = 1 \}$, tout point de ce dernier est un point singulier de f. Donc f possède toute une ligne composée de points singuliers non isolés (une *ligne singulière.*)

La nature d'un point singulier isolé $z = a$ est étroitement liée à celle de la série de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de a (nous dirons plus brièvement série de Laurent au voisinage de a). Pour les points finis a ce lien est exprimé par les trois théorèmes suivants.

Théorème 1. *Un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ d'une fonction f est éliminable si et seulement si la série de Laurent de f au voisinage de a ne contient pas la partie principale:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

▶ *Nécessité.* Soit a un point singulier éliminable; alors $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A < \infty$ et par suite f est bornée (pour fixer les idées, $|f| \leqslant M$) dans un voisinage pointé $\{0 < |z - a| < R\}$ du point a. Prenons un ρ, $0 < \rho < R$, et utilisons les inégalités de Cauchy

$$|c_n| \leqslant M/\rho^n \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Si $n < 0$, le second membre tend vers 0 lorsque $\rho \to 0$, le premier membre étant indépendant de ρ. Donc $c_n = 0$ pour $n < 0$ et la partie principale de la série de Laurent fait défaut.

Suffisance. Supposons que la fonction f se représente par une série de Laurent (2) sans partie principale dans un voisinage pointé de a. Cette série est une série de Taylor, donc

$$\lim_{z \to a} f(z) = c_0 < \infty.$$

Le point a est donc un point singulier éliminable. ◀

Remarque. En produisant les mêmes raisonnements on prouve le

Théorème 1'. *Un point singulier isolé a d'une fonction f est éliminable si et seulement si f est bornée dans un voisinage pointé de a.*

En prolongeant f par continuité au point a, i.e. en posant $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$, on obtient une fonction holomorphe en a (c'est-à-dire on élimine la singularité en a). Ceci justifie le terme de « point éliminable ». Nous conviendrons dans la suite que ces points sont réguliers et non pas singuliers pour la fonction étudiée.

✱ Montrer que si f est une fonction holomorphe dans un voisinage pointé d'un point a et que $\operatorname{Re} f > 0$ partout dans ce voisinage, alors a est un point singulier éliminable de f. ✱

Théorème 2. *Un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ d'une fonction f est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de f dans un voisinage pointé de a ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls:*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad N > 0. \tag{3}$$

▶ *Nécessité.* Soit a un pôle; puisque $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, il existe un voisinage pointé du point a dans lequel la fonction f est holomorphe et non nulle. Dans ce voisinage est holomorphe aussi la fonction $\varphi(z) = 1/f(z)$ et de plus $\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0$. Donc a est un point singulier éliminable de la fonction φ et dans notre voisinage on a le développement

$$\varphi(z) = b_N (z-a)^N + b_{N+1} (z-a)^{N+1} + \dots \qquad (b_N \neq 0).$$

Dans ces conditions on a dans le même voisinage

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots} \tag{4}$$

et de plus le second facteur est une fonction holomorphe en a, qui est donc justiciable du développement taylorien

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots$$
$$\left(c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0\right).$$

En portant ce développement dans (4), on obtient

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

On reconnaît ici la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de a et l'on voit que sa partie principale contient un nombre fini de termes.

Suffisance. Supposons que f se représente dans un voisinage pointé de a par une série de Laurent (3) dont la partie principale contient un nombre fini de termes et supposons encore que $c_{-N} \neq 0$. Les fonctions f et $\varphi(z) = (z-a)^N f(z)$ sont alors holomorphes dans ce voisinage. La fonction $\varphi(z)$ se représente dans notre voisinage par la série

$$\varphi(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots,$$

sur laquelle on voit que a est un point singulier éliminable et que $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z) = c_{-N} \neq 0$. Donc la fonction $f(z) = \varphi(z)/(z-a)^N$ tend vers l'infini lorsque z tend vers a, i.e. a est un pôle de f. ◀

Signalons encore un fait simple relatif au lien entre les pôles et les zéros.

Théorème 2'. *Un point a est un pôle d'une fonction f si et seulement si la fonction $\varphi = 1/f$, $\varphi \not\equiv 0$, est holomorphe dans un voisinage de z et $\varphi(a) = 0$.*

▶ La condition nécessaire est celle du théorème 2. Montrons la condition suffisante. Si $\varphi \not\equiv 0$ est holomorphe en a et $\varphi(a) = 0$, d'après le théorème d'unicité (n° 22) il existe un voisinage pointé de a dans lequel $\varphi \neq 0$. La fonction $f = 1/\varphi$ est holomorphe dans ce voisinage, donc a est un point singulier isolé de f. Or $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, donc a est un pôle de f. ◀

Ce lien nous amène à formuler la

Définition 3. On appelle *ordre d'un pôle a* d'une fonction f l'ordre de ce point traité comme un zéro de la fonction $\varphi = 1/f$.

On voit sur la démonstration du théorème 2 que l'ordre d'un pôle est confondu avec l'indice N du terme supérieur de la partie principale du développement de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de ce pôle.

Théorème 3. *Un point singulier isolé a d'une fonction f est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de a contient une infinité de termes non nuls.*

▶ Ce théorème est en fait déjà contenu dans les théorèmes 1 et 2 (si la partie principale contient une infinité de termes, le point a ne peut être ni éliminable, ni un pôle ; si a est un point singulier essentiel, la partie principale ne peut ni pas exister, ni contenir un nombre fini de termes). ◀

✱ Montrer que si a est un point singulier essentiel d'une fonction f, alors $\rho^k \max\limits_{\{|z-a|=\rho\}} |f(z)| \to \infty$ lorsque $\rho \to 0$ pour tout k naturel. ✱

Le comportement d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel est régi par l'intéressant théorème suivant:

Théorème 3′ (Yu. Sohotsky *)). *Si a est un point singulier essentiel d'une fonction f, pour tout nombre $A \in \overline{\mathbf{C}}$ on peut trouver une suite de points $z_n \to a$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A. \tag{5}$$

▶ Soit $A = \infty$. Puisque d'après le théorème 1′ la fonction f ne peut être bornée dans le voisinage pointé $\{0 < |z - a| < r\}$, il existe dans ce voisinage un point z_1 tel que $|f(z_1)| > 1$. Pour la même raison il existe dans $\{0 < |z - a| < |z_1 - a| < 2\}$ un point z_2 tel que $|f(z_2)| > 2$. En poursuivant cette procédure on trouve dans le voisinage $\{0 < |z - a| < |z_1 - a|/n\}$ un point z_n tel que $|f(z_n)| > n$. Il est évident que $z_n \to a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Supposons maintenant que $A \neq \infty$. Ou bien les A-points de la fonction f admettent a pour point d'accumulation et alors on peut en extraire une suite $z_n \to a$ telle que $f(z_n) = A$, ou bien il existe un voisinage pointé $\{0 < |z - a| < r'\}$ dans lequel $f(z) \neq A$. La fonction $\varphi(z) = 1/(f(z) - A)$ pour laquelle a est un point singulier essentiel (puisque $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ et si φ tendait vers une limite finie ou infinie lorsque $z \to a$, il en serait de même de f) est holomorphe dans ce voisinage. D'après le théorème 3′ il existe une suite $z_n \to a$ telle que $\varphi(z_n) \to \infty$; or

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A. \quad ◀$$

L'ensemble des limites de la fonction f sur les suites de points $z_n \to a$ s'appelle *ensemble d'indétermination* de la fonction f au point a. Si a est un point singulier éliminable ou un pôle de la fonction f, son ensemble d'indétermination au point a est composé d'un seul point (fini ou infini). Le théorème de Sohotsky affirme que pour un point singulier essentiel on a un autre cas extrême: l'ensemble d'indétermination en un tel point recouvre $\overline{\mathbf{C}}$ tout entier.

✱ 1. Montrer que le théorème de Sohotsky est valable pour le point d'accumulation des pôles.

---

*) Ce théorème a été démontré en 1868 par le mathématicien russe Yulian Sohotsky (1842-1927) dans sa thèse *Théorie des résidus intégraux* soutenue à l'Université de Pétersbourg. La même année le mathématicien italien F. Casorati et huit ans plus tard C. Weierstrass publient une démonstration. Ce théorème porte leurs noms.

2. Soit a un point singulier essentiel d'une fonction f. Déterminer la nature de la singularité de la fonction $1/f$ en a. (Réponse: a est le point d'accumulation des pôles ou un point singulier essentiel.) *

Quelques mots sur les points singuliers isolés à l'infini. La classification et les théorèmes 1′ à 3′ se généralisent automatiquement au cas $a = \infty$. Mais les théorèmes 1 à 3 relatifs à la nature des développements en série de Laurent doivent être modifiés. En effet, la nature d'un point singulier fini est définie par la partie principale du développement en série de Laurent, partie qui contient des puissances négatives de $z - a$ présentant une singularité en un tel point (d'où le terme de « partie principale »). A l'infini, par contre, les puissances négatives sont régulières et la singularité est définie par l'ensemble des puissances positives. Il est donc naturel d'appeller partie principale du développement d'une fonction en série de Laurent dans un voisinage pointé du point à l'inifini l'ensemble des puissances positives. Ainsi modifiés, les théorèmes 1 à 3 seront valables aussi pour le cas où $a = \infty$.

On obtient immédiatement ce résultat en faisant le changement de variable $z = 1/w$ si l'on pose $f(z) = f(1/w) = \varphi(w)$, on a de toute évidence

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} \varphi(w),$$

donc φ présente en $w = 0$ la même singularité que f en $z = \infty$. Dans le cas d'un pôle la fonction φ admet le développement suivant dans $\{0 < |w| < r\}$:

$$\varphi(w) = \frac{b_{-N}}{w^N} + \ldots + \frac{b_{-1}}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad (b_{-N} \neq 0);$$

en faisant le changement $w = 1/z$, on obtient le développement de f dans la couronne $\{R < |z| < \infty\}$, $R = 1/r$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n z^n + c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N,$$

où $c_n = b_{-n}$, $c_N \neq 0$. La partie principale de ce développement contient un nombre fini de termes. On traite de façon analogue les cas d'un point singulier éliminable et essentiel.

Voici en conclusion une classification des fonctions holomorphes d'après leurs points singuliers. En vertu du théorème de Liouville, les fonctions qui ne présentent aucune singularité (i.e. qui sont holomorphes sur $\bar{\mathbf{C}}$) sont constantes. La classe suivante par ordre de simplicité est la classe des fonctions entières.

Définition 4. On appelle *fonction entière* une fonction holomorphe sur **C**, i.e. une fonction ne possédant pas de point singulier fini.

Le point $a = \infty$ est par conséquent un point singulier isolé de f. Si c'est un point singulier éliminable, alors $f \equiv$ const. Si c'est un pôle, la partie principale du développement de f en série de Laurent au voisinage du point à l'infini est un polynôme $g(z) = c_1(z) + \ldots + c_N z^N$. En soustrayant de f sa partie principale on obtient aussi une fonction entière $f - g$ mais dont le point à l'infini est un point singulier éliminable. C'est une constante, donc *une fonction entière présentant un pôle à l'infini est nécessairement un polynôme.*

Les fonctions entières présentant un point singulier essentiel à l'infini s'appellent *fonctions entières transcendantes* (telles sont par exemple les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$).

✱ 1. Montrer qu'une fonction entière f telle que $|f(z)| \geqslant |z|^N$ pour tous les z assez grands est un polynôme.

2. Déduire le théorème de Sohotsky pour les fonctions entières et $a = \infty$ du théorème de Liouville. ✱

Définition 5. On dit qu'une fonction est *méromorphe* dans $\overline{\mathbf{C}}$ si les seules singularités qu'elle présente sont des pôles.

Les fonctions entières forment une sous-classe de la classe des fonctions méromorphes (elles ne possèdent pas de singularités dans **C**). Chaque pôle étant un point singulier isolé, une fonction méromorphe ne peut présenter dans **C** qu'un nombre au plus dénombrable de pôles. En effet, chaque disque $\{|z| < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ ne peut contenir qu'un nombre fini de pôles (sinon il existerait un point d'accumulation fini qui serait un point singulier non isolé et non un pôle) et ces pôles peuvent être dénombrés. Les fonctions $\operatorname{tg} z$ et $\operatorname{cotg} z$ sont des exemples de fonctions méromorphes présentant une infinité de pôles.

Théorème 4. *Si une fonction méromorphe f présente à l'infini un point singulier éliminable ou un pôle (i.e. si dans $\overline{\mathbf{C}}$ ses seules singularités sont des pôles), elle est rationnelle.*

▶ Les pôles de la fonction f sont en nombre fini, car dans le cas contraire ils admettraient, en raison de la compacité de $\overline{\mathbf{C}}$, un point d'accumulation qui serait un point singulier non isolé et non un pôle. Désignons par a_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) les pôles finis de f et par

$$g_\nu(z) = \frac{c_{-N_\nu}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{N_\nu}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z-a_\nu} \tag{6}$$

la partie principale du développement de f en série de Laurent au voisinage de a_ν. Désignons encore par

$$g(z) = c_1 z + \ldots + c_N z^N \tag{7}$$

la partie principale du développement de f en série de Laurent au voisinage de $a = \infty$; posons $g \equiv 0$ si $a = \infty$ est un point singulier éliminable.

Considérons la fonction

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1} g_\nu(z);$$

tout point $z \in \overline{\mathbf{C}}$ est un point régulier de $\varphi(z)$, d'où $\varphi(z) \equiv c_0$ d'après le théorème de Liouville. Donc

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(z), \tag{8}$$

i.e. f est une fonction rationnelle.◀

Remarque. La formule (8) est la décomposition d'une fonction rationnelle f en une partie entière et en fractions élémentaires. Le raisonnement produit est une démonstration simple de l'existence d'une telle décomposition.

On se servira parfois du terme de « fonction méromorphe » dans une acception plus large. Plus exactement, on dira qu'une fonction f est *méromorphe dans un domaine D* si ses seules singularités dans D sont des pôles. Une telle fonction ne peut présenter qu'un nombre au plus dénombrable de pôles. En effet, en construisant l'exhaustion compacte $\{G_n\}$ de D (cf. lemme du n° 23), on constate que dans chaque G_n la fonction f ne peut présenter qu'un nombre fini de pôles. Si l'ensemble des pôles de la fonction f méromorphe dans D est infini, ses points d'accumulation sont situés sur la frontière ∂D.

Le théorème 4 prouvé plus haut peut désormais s'énoncer comme suit : *toute fonction méromorphe sur $\overline{\mathbf{C}}$ est rationnelle.*

26. Résidus. Cela semble paradoxal, mais les éléments d'étude les plus intéressants d'une fonction holomorphe sont les points où elle cesse d'être holomorphe, i.e. ses points singuliers. Dans la suite on verra sur la base de nombreux faits que la principale information sur les fonctions holomorphes est fournie par les points singuliers et les parties principales des développements en série de Laurent au voisinage de ces points *).

Nous allons illustrer cette assertion par le calcul d'intégrales de fonctions holomorphes. Soit f une fonction holomorphe partout dans un domaine D sauf en un ensemble de points singuliers isolés, donc en

*) Cette assertion admet une interprétation physique. Si une fonction holomorphe est traitée comme le potentiel complexe d'un champ de vecteurs, pour fixer les idées le champ de vitesses d'écoulement d'un fluide (cf. n° 7), les points singuliers sont des sources, des puits, des tourbillons et autres éléments de ce champ. Cf. M. Lavrentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, trad. française, Ed. Mir, 1977.

un ensemble au plus dénombrable. Soit un domaine $G \Subset D$ dont la frontière ∂G est constituée d'un nombre fini de courbes continues sans points singuliers ; désignons par $a_1, \ldots, a_n$ les points singuliers (en nombre fini) contenus dans G. Construisons des cercles $\gamma_\nu = \{ |z - a_\nu| = r\}$ de rayon r assez petit pour que les disques $\overline{U}_\nu$ qu'ils limitent soient disjoints et contenus dans G. Supposons que γ_ν sont orientés dans le sens direct (fig. 45). Désignons le domaine $G \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{U}_\nu$ par G_r ; la fonction f est holomorphe dans $\overline{G}_r$ donc, d'après le théorème intégral de Cauchy pour les domaines multiplement connexes on a

$$\int_{\partial G_r} f \, dz = 0. \tag{1}$$

Or la frontière orientée ∂G_r est constituée de ∂G et des cercles γ_ν ($\nu = = 1, \ldots, n$) orientés dans le sens rétrograde et d'après les propriétés des intégrales on a

$$\int_{\partial G} f \, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f \, dz. \tag{2}$$

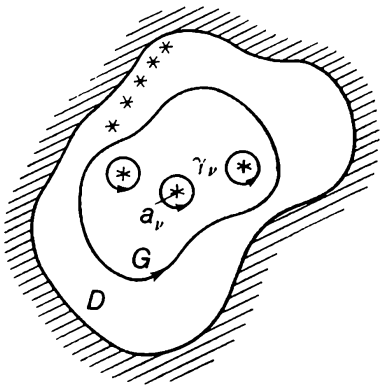

Fig. 45

Le calcul de l'intégrale d'une fonction holomorphe sur la frontière d'un domaine se ramène donc à celui d'intégrales sur des cercles aussi petits qu'on veut ayant pour centres les points singuliers de cette fonction.

Définition 1. L'intégrale d'une fonction f le long d'un cercle $\gamma_r = \{ |z - a| = r\}$, de rayon r assez petit et de centre un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ de f, divisée par $2\pi i$, s'appelle *résidu* de f au point a et se note

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f \, dz. \tag{3}$$

D'après le théorème d'invariance de l'intégrale par une déformation homotope du contour, le résidu est indépendant de r (pour r assez petit) et est défini par le comportement local de f en a.

La formule (2) établie plus haut traduit le théorème des résidus de Cauchy *) :

*) A. Cauchy est arrivé à la notion de résidu dans ses mémoires de 1814 et 1825 en étudiant la différence entre les intégrales le long de deux chemins de mêmes extrémités, entourant un pôle de la fonction. Ceci explique l'origine du terme « résidu », qui est apparu pour la première fois en 1826 dans l'article *Sur un nouveau genre de calcul identique au calcul des infiniment petits*. Cauchy a publié dans la foulée de nombreux travaux consacrés à l'application des résidus au calcul d'intégrales développées en séries, des solutions d'équations différentielles, etc.

Théorème 1. *Si une fonction f est holomorphe partout dans un domaine D sauf en un ensemble de points singuliers isolés, $G \Subset D$ et ∂G ne contient pas de points singuliers, alors*

$$\int_{\partial G} f\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname*{res}_{a_\nu} f, \tag{4}$$

où la sommation est étendue à tous les points singuliers $a_\nu \in G$ de la fonction f.

Ce théorème est d'une grande portée, car il ramène le calcul de la quantité globale qu'est l'intégrale d'une fonction holomorphe le long de la frontière d'un domaine à celui de quantités locales que sont les résidus de cette fonction en ses points singuliers.

Nous allons voir que les résidus d'une fonction en ses points singuliers sont entièrement définis par les parties principales des développements en série de Laurent aux voisinages de ces points, ce qui montrera que pour calculer les intégrales d'une fonction holomorphe, il suffit d'être renseigné uniquement sur ses points singuliers et les parties principales en ces points.

Théorème 2. *Le résidu d'une fonction f en un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ est égal au coefficient c_{-1} de la puissance $(z-a)^{-1}$ de la série de Laurent au voisinage de a:*

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{5}$$

▶ Au voisinage du point a, la fonction f se représente par la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

qui est uniformément convergente sur le cercle $\gamma_r = \{\,|z-a| = r\}$ pour r assez petit. En intégrant cette série terme à terme le long de γ_r et en se servant de l'orthogonalité des puissances (cf. n°15), on trouve que $\int_{\gamma_r} f\,\mathrm{d}z = c_{-1}\cdot 2\pi i$. En se rappelant de la définition du résidu, on obtient (5). ◀

Corollaire. *Le résidu d'une fonction est nul en un point singulier éliminable $a \in \mathbf{C}$.*

Exhibons les formules de calcul du résidu d'une fonction en un pôle. Supposons tout d'abord que a est un pôle simple (i.e. d'ordre un). Au voisinage de a la série de Laurent de f est

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

D'où la formule du résidu en un pôle simple :

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z - a) f(z). \tag{6}$$

Cette formule est particulièrement commode pour les calculs si elle est légèrement modifiée. Supposons qu'au voisinage de a

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

où φ et ψ sont des fonctions holomorphes en a, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (d'où il résulte que a est un pôle simple de f). La formule (6) nous donne alors

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}},$$

i.e.

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Supposons maintenant que a est un pôle d'ordre n de f. Au voisinage de a, on a alors

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Multiplions les deux membres de ce développement par $(z - a)^n$ pour éliminer les puissances négatives du second membre, dérivons $n - 1$ fois (pour mettre en évidence c_{-1}) et faisons tendre z vers a. Nous obtenons la formule suivante du résidu en un pôle d'ordre n :

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}. \tag{7}$$

Il n'existe pas de formules identiques pour le calcul des résidus en un point singulier essentiel et il faut donc déterminer les parties principales des séries de Laurent.

Quelques mots sur le résidu d'une fonction à l'infini.

Définition 2. Soit f une fonction dont le point à l'infini est un point singulier isolé. On appelle *résidu de f à l'infini* la quantité

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\bar{R}}} f \, dz, \tag{8}$$

où $\gamma_{\bar{R}}$ est un cercle de rayon R assez grand parcouru dans le sens rétrograde.

Le cercle γ_R^- est orienté de telle sorte que le voisinage du point à l'infini $\{R < |z| < \infty\}$ reste à gauche du sens de parcours. Développons la fonction f en série de Laurent au voisinage du point à l'infini :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

En intégrant cette série terme à terme le long de γ_R^- et en se servant de l'orthogonalité des puissances, on trouve

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}. \tag{9}$$

Les puissances négatives figurent dans la partie régulière mais pas dans la partie principale du développement de Laurent à l'infini. Donc, contrairement aux points singuliers finis, le résidu à l'infini peut ne pas être nul même si $z = \infty$ est un point régulier.

Citons encore un théorème élémentaire relatif à la somme totale des résidus.

Théorème 3. *Si une fonction f est holomorphe partout dans* **C** *sauf en un nombre fini de points a_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), la somme de ces résidus en tous les points singuliers finis et à l'infini est nulle :*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{a_\nu} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0. \tag{10}$$

▶ Construisons un cercle $\gamma_R = \{|z| = R\}$ de rayon assez grand pour qu'il contienne tous les points singuliers finis a_ν et orientons-le dans le sens direct. D'après le théorème des résidus,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f \, dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{a_\nu} f ;$$

d'après le théorème de Cauchy du n° 17, la quantité du premier membre ne change pas lorsque R croît, donc elle est égale au résidu de f à l'infini pris avec le signe moins (compte tenu du sens de parcours). La dernière égalité est par conséquent équivalente à (10). ◀

Exemple. Pour calculer l'intégrale $I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2}$ il n'est pas nécessaire de calculer les résidus de l'intégrant en ses huit pôles d'ordre deux contenus dans le cercle $\{|z| = 2\}$. Cette fonction est justiciable du théorème de la somme totale des résidus en vertu duquel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{a_\nu} \frac{1}{(z^8+1)^2} + \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{(z^8+1)^2} = 0.$$

Mais cette fonction présente à l'infini un zéro d'ordre 16, donc son développement en série de Laurent au voisinage de $z = \infty$ ne contient que des puissances négatives dont la première est z^{-16}. Par conséquent, son résidu à l'infini est nul. *Idem* pour la somme des résidus aux points singuliers finis. Autrement dit, $I = 0$.

Voyons en conclusion un exemple d'application du théorème des résidus au calcul des intégrales impropres de fonctions d'une variable réelle. Soit à calculer l'intégrale

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx, \tag{11}$$

où t est un nombre réel (cette intégrale converge absolument, car elle est majorée par l'intégrale convergente de la fonction $1/(1 + x^2)$).

La méthode d'application des résidus est la suivante. On prolonge l'intégrant au plan complexe en la fonction

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

puis on choisit un contour fermé de telle sorte qu'il contienne un intervalle $[-R, R]$ de la droite d'intégration et un arc de cercle reliant les extrémités de ce segment. On applique le théorème des résidus à ce contour fermé, puis on passe à la limite en faisant tendre R vers l'infini. On obtient la solution du problème si l'on arrive à calculer la limite de l'intégrale le long de l'arc.

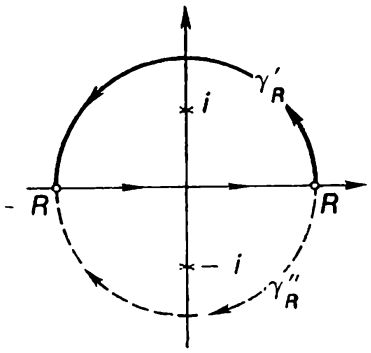

Fig. 46

Soit $z = x + iy$. Puisque $|e^{izt}| = e^{-yt}$, on distinguera deux cas: $t \geqslant 0$ et $t < 0$. Dans le premier cas on bouclera le segment $[-R, R]$ avec le demi-cercle supérieur γ'_R parcouru dans le sens direct (fig. 46). Pour $R > 1$ l'intérieur de ce contour contient un seul pôle simple de f en $z = i$, pôle en lequel le résidu se calcule facilement par la formule (6'):

$$\operatorname*{res}_{i} \frac{e^{izt}}{1+z^2} = \frac{e^{-t}}{2i}. \tag{12}$$

D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma'_R} f(z)\, dz = \pi e^{-t}. \tag{12'}$$

Puisque pour $t \geqslant 0$ on a $|e^{itz}| = e^{-yt} \leqslant 1$ et $|z^2 + 1| \geqslant R^2 - 1$ sur γ'_R, l'intégrale sur γ'_R admet la majoration

suivante:

$$\left| \int_{\gamma'_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2}\, dz \right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1}, \tag{13}$$

sur laquelle on voit que cette intégrale tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Donc en faisant tendre R vers ∞ dans (12'), on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \pi e^{-t}. \tag{14'}$$

Pour $t < 0$ la majoration (13) n'est pas valable, puisque $| e^{izt} | = e^{-yt}$ croît fortement lorsque $y \to +\infty$. Il faut donc remplacer le demi-cercle supérieur γ'_R par le demi-cercle inférieur γ''_R (fig. 46). Supposons que γ''_R est parcouru dans le sens rétrograde. Pour $R > 1$ on a alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma''_R} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{-i} f = \pi e^{t}. \tag{12''}$$

Puisque pour $t < 0$ on a $| e^{izt} | = e^{-yt} \leqslant 1$ et $| z^2 + 1 | \geqslant R^2 - 1$ sur γ''_R, l'intégrale de f sur γ''_R tend aussi vers 0 lorsque $R \to \infty$ et l'on déduit de (12''):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \pi e^{t}. \tag{14''}$$

En combinant les formules (14') et (14''), on obtient en définitive:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}. \tag{15}$$

Dans la suite on se servira souvent des résidus pour le calcul des intégrales. Enonçons en conclusion un lemme utile dans ces calculs.

Lemme (Jordan *)). *Soit f une fonction holomorphe partout dans $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ sauf en un ensemble de points singuliers isolés, et supposons que $M(R) = \max | f(z) |$ sur le demi-cercle $\gamma_R = \{ | z | = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ tend vers 0 lorsque $R \to \infty$ (ou suivant une suite $R_n \to \infty$ telle que γ_{R_n} ne contienne pas de points singuliers de f). Alors pour tout $\lambda > 0$ l'intégrale*

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz \tag{16}$$

tend vers 0 lorsque $R \to \infty$ (ou suivant la suite $R_n \to \infty$).

*) Ce lemme est apparu en 1894 dans le manuel d'analyse du mathématicien français Camille Jordan (1838-1922).

(Ce lemme traduit le fait suivant: $M(R)$ peut tendre vers 0 aussi lentement qu'on veut, de sorte que l'intégrale de f le long de γ_R ne tend pas nécessairement vers 0. La multiplication par l'exponentielle $e^{i\lambda z}$, $\lambda > 0$, accélère la tendance vers 0.)

▶ Désignons par $\gamma'_R = \{z = Re^{i\varphi} : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$ la moitié de droite de γ_R. La fonction sinus étant convexe pour $\varphi \in [0, \pi/2]$, on a $\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$, donc $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin\varphi} \leqslant e^{-2\lambda R\varphi/\pi}$ sur γ'_R. Par conséquent,

$$\left|\int_{\gamma_R'} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz\right| \leqslant M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R\varphi/\pi} R\, d\varphi = M(R)\frac{\pi}{2\lambda}(1 - e^{-\lambda R})$$

et l'intégrale sur γ'_R tend vers 0 lorsque $R \to \infty$. L'intégrale sur $\gamma''_R = \gamma_R \setminus \gamma'_R$ se majore de façon analogue.◀

On voit sur la démonstration que l'homomorphie de f n'est pas essentielle dans ce théorème.

Exercices

1. On appelle intégrale de type Cauchy une intégrale de la forme

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

où γ est une courbe différentiable (ou rectifiable), f une fonction continue (ou sommable) sur γ. Montrer que F est une fonction holomorphe dans $\overline{\mathbf{C}} \setminus \gamma$ et nulle à l'infini.

2. Soient γ une courbe de Jordan fermée différentiable, D un domaine tel que $\gamma = \partial D$ et $f \in C^1(\gamma)$. Montrer qu'à la traversée de γ une intégrale de type Cauchy subit un saut égal à la valeur de f au point de traversée. Plus exactement: si $\zeta_0 \in \gamma$ et $z \to \zeta_0$ en restant respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de D, alors $F(z)$ prend les valeurs limites $F^+(\zeta_0)$ et $F^-(\zeta_0)$ et de plus

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0)$$

(formule de Yu. Sohotsky). [N o t a: représenter $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big].$$

3. Montrer sous les hypothèses de l'exercice précédent que chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'une

intégrale de type Cauchy soit une intégrale de Cauchy:

a) $\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0$ pour tout $z \in \bar{\mathbf{C}} \setminus \bar{D}$,

b) $\int_\gamma \zeta^n f(\zeta)\,d\zeta$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

4. Supposons que f est holomorphe dans un disque $\{ |z| < R \}$, $R > 1$; montrer que la valeur moyenne du carré de son module sur le cercle $\{ |z| = 1 \}$ est égale à la somme des carrés des modules des coefficients de la série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

5. Expliquer pourquoi la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{n^2x^2+1}$ qui converge pour tout x réel ne peut être développée en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

6. Montrer que toute fonction entière f vérifiant identiquement les relations $f(z+1) \equiv f(z)$ et $f(z+i) \equiv f(z)$ est constante.

7. Montrer que la fonction $f(z) = \int_0^1 \frac{\sin tz}{t}\,dt$ est entière.

8. Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque fermé $\bar{U} = \{|z| \leqslant R\}$ et $a_0 \neq 0$. Montrer que $f \neq 0$ dans le disque $\left\{ |z| < \frac{|a_0|\,R}{|a_0| + M} \right\}$ où $M = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$.

9. Montrer que la série entière d'une fonction f ne peut absolument converger en aucun point frontière du disque de convergence de f si celui-ci contient au moins un pôle de f.

10. Montrer qu'une fonction holomorphe à l'extérieur de deux ensembles compacts disjoints peut être représentée sous forme d'une somme de deux fonctions dont l'une est holomorphe à l'extérieur de l'un, et l'autre, à l'extérieur de l'autre ensemble.

CHAPITRE III

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Dans ce chapitre on se propose d'étudier la notion de prolongement analytique, qui est l'une des plus fondamentales en analyse complexe. Elle nous permettra d'introduire en particulier les fonctions analytiques multivalentes.

Les problèmes les plus simples nous amènent à envisager des solutions multivalentes. Par exemple, l'équation $z = w^2$ admet pour tout $z \neq 0$ deux solutions opposées. L'ensemble de ces solutions, que l'on désignera par $\sqrt{z}$, ne peut être traité comme une fonction de z, puisque par définition une fonction est univalente. Le renoncement à la condition d'univalence nous conduirait à des difficultés inextricables. En effet, comment comprendre la somme $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ *) si chaque terme prend deux valeurs ? Les opérations d'analyse les plus simples sur de telles « fonctions multivalentes » soulèveraient de notables difficultés. La notion de prolongement analytique permet d'y obvier.

§ 8. Notion de prolongement analytigue

27. Eléments et leurs prolongements. Commençons par l'étude de la notion de prolongement analytique en restant dans le cadre de la théorie des fonctions univalentes (holomorphes). Par *prolongement analytique* d'une fonction f_0 définie initialement sur un ensemble $M \subset \mathbf{C}$ on comprendra une fonction f définie sur un domaine $D \supset \mathrm{M}$ tel que f soit holomorphe dans D et sa restriction à M, confondue avec f_0:

$$f \mid_M = f_0.$$

---

*) En ajoutant $\sqrt{z} + \sqrt{z}$, on obtient une somme trivalente ($2w_1$, $-2w_1$ et 0, où w_1 est l'une des deux valeurs de $\sqrt{z}$). Faut-il additionner seulement les valeurs de « même signe » ? Mais ceci est tout à fait saugrenu en analyse complexe : soient $\sqrt{z_1} = \pm(1+i)$ et $\sqrt{z_2} = \pm(1-i)$. Quels sont les termes de « même signe » dans ce cas ?

On peut résoudre ce problème de plusieurs façons. Dans le premier chapitre, par exemple, nous avons prolongé analytiquement les fonctions e^x, $\sin x$ et autres définies sur **R** au plan complexe **C**. La fonction $\frac{\sin z}{z}$ est définie dans le domaine $\mathbf{C} \setminus \{0\}$; son développement en série de z

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

nous permet de la prolonger au plan **C** tout entier (par continuité au point $z = 0$).

Au contraire, la somme de la série

$$f_0(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$$

n'est définie (et holomorphe) que dans le disque $\{ |z| < 1 \}$, car la série diverge pour $|z| \geqslant 1$. Or en sommant cette progression géométrique, on trouve que $f_0(z) = \frac{1}{1-z}$ et cette formule nous donne le prolongement analytique de f_0 au domaine $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.

✱ Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n + z^{-n}}$ converge pour $|z| < 1$ et $|z| > 1$ vers des fonctions holomorphes distinctes (Weierstrass, 1880). ✱

Considérons un exemple moins trivial. La *fonction gamma* est définie pour $\operatorname{Re} z > 0$ par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{1}$$

où par t^{z-1}, $t > 0$, on comprend $e^{(z-1)\ln t}$. Les fonctions

$$F_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

sont entières, car l'intégrale peut être dérivée par rapport au paramètre en tout point du plan. D'après le théorème de Weierstrass la fonction gamma est holomorphe dans le demi-plan de droite, puisque la suite $\{F_n\}$ converge uniformément en z vers $\Gamma(z)$ sur tout sous-ensemble compact de ce demi-plan.

Si $x = \operatorname{Re} z \leqslant 0$, l'intégrale (1) cesse de converger, car l'intégrant croît trop vite lorsque $t \to 0$ (on a $|t^{z-1}| = e^{\operatorname{Re}(z-1)\ln t} = t^{x-1}$ et $e^{-t} \to 1$ lorsque $t \to 0$). Pour $t = 0$ on améliore la convergence en déduisant de e^{-t} les premiers termes de son développement en série

de Taylor au voisinage de 0 et l'on obtient ainsi un facteur qui tend vers 0 avec t. Pour $\operatorname{Re} z > 0$ on obtient par la même procédure

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1}\,dt + \\ + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

ou, en calculant les intégrales élémentaires,

$$\Gamma(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} = \\ = \int_0^1 \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt. \qquad (2)$$

La deuxième intégrale du second membre est une fonction entière (cf. plus haut), la première intégrale converge uniformément en z sur tout sous-ensemble compact du demi-plan $\{\operatorname{Re} z > -(n+1)\}$ (car

$$e^{-t} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k$$

tend vers 0 lorsque $t \to 0$ à la même vitesse que t^{n+1}), donc c'est une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

L'égalité (2) nous permet par conséquent de prolonger analytiquement la différence $\Gamma(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)}{k!} \frac{1}{z+k}$ dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > -(n+1)\}$, quant à la fonction $\Gamma(z)$, elle se trouve prolongée à une fonction méromorphe dans ce demi-plan. Vu que pour n on peut prendre n'importe quel entier naturel, on obtient le prolongement méromorphe de la fonction gamma au plan tout entier. On voit également que ce prolongement présente des pôles simples en 0 et aux points entiers négatifs, et de plus le résidu au pôle $z = -k$ est égal à $(-1)^k/k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. La figure 47 représente le relief de la fonction gamma. Les lignes portées sur ce relief sont les lignes de mêmes module et argument.

La méthode d'amélioration de la convergence développée plus haut s'appelle *méthode de Cauchy*; nous l'utiliserons encore au chapitre V (n° 45). A noter qu'on peut prolonger méromorphement la fonction gamma dans le demi-plan de gauche à l'aide de l'équation

fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ qui est satisfaite par cette fonction pour $\operatorname{Re} z > 0$. En effet, pour $\operatorname{Re} z > 0$ on peut écrire $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ et remarquer ensuite que le second membre de cette équation est défini pour $\operatorname{Re} z > -1$, $z \neq 0$. En répétant cette procédure, on prolonge la fonction gamma à tout point $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

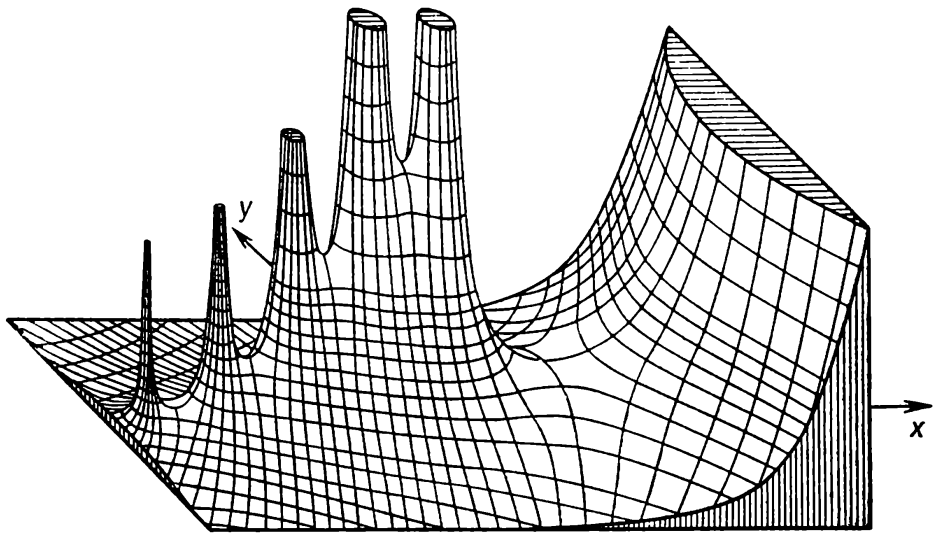

Fig. 47

Certes il n'est toujours pas possible de prolonger analytiquement une fonction. A preuve l'exemple du n° 25: la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

est holomorphe dans le disque unité $U = \{ |z| < 1 \}$, mais le cercle $\{ |z| = 1 \}$ est sa ligne singulière, donc il est impossible de la prolonger analytiquement à un domaine contenant strictement U.

✱ Montrer que si une fonction f est holomorphe dans un disque fermé $\bar{U}$, elle se prolonge holomorphement à un disque $U' \supset U$. ✱

Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D et ne se prolonge analytiquement à aucun domaine contenant strictement D, alors on dira que D est le *domaine d'holomorphie* de f. Au n° 46 on montrera que tout domaine $D \subset \bar{\mathbf{C}}$ est un domaine d'holomorphie d'une fonction.

Nous allons voir maintenant un exemple qui nous incitera à élargir la notion de prolongement analytique. Faisons d'abord quelques remarques simples sur la racine carrée d'un nombre complexe. Si $z = re^{i\varphi}$, alors $\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$ et de plus pour tout $z \neq 0$ la valeur

$\varphi = \arg z$ est définie à $2k\pi$ près. Si φ subit un accroissement de 2π, on aura $\sqrt{r}\, e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$, i.e. à chaque accroissement de 2π, la racine $\sqrt{z}$ change de signe. Donc pour $z \neq 0$ la racine $\sqrt{z}$ est bivalente et par suite n'est pas une fonction. Pour obtenir une fonction dans un domaine D à partir des valeurs de $\sqrt{z}$ faut poser des conditions supplémentaires assurant un choix unique des valeurs de $\varphi = \arg z$ pour tout $z \in D$. Si une telle fonction est continue dans D, on l'appelle *détermination* de la racine dans ce domaine.

Soit par exemple le disque $U_0 = \{ |z-1| < 1 \}$. Considérons dans U_0 la détermination

$$w = f_0(z) = \sqrt{z}\, e^{i\varphi/2}, \qquad -\pi/2 < \varphi < \pi/2. \tag{3}$$

Puisque la fonction inverse $z = w^2$ est univoque, f_0 est biunivoque (injective) dans U_0 et nous pouvons utiliser la règle de dérivation des fonctions inverses *), en vertu de laquelle la dérivée $f_0'(z) = \dfrac{1}{\frac{dz}{dw}} = \dfrac{1}{2w} = \dfrac{1}{2f_0(z)}$ existe en chaque point $z \in U_0$.

Donc la fonction f_0 est holomorphe dans U_0 ($f_0 \neq 0$ dans U_0).

Prolongeons maintenant analytiquement la fonction f_0 en élargissant le domaine de variation de $\varphi = \operatorname{Arg} z$ et en veillant à ce que φ soit univoque (la fonction restera alors holomorphe). Si l'on élargit ce domaine dans le sens de croissance de φ, dans le disque $U = \{ |z+1| < 1 \}$ par exemple, on obtient une fonction f définie par les conditions

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \qquad \pi/2 < \varphi < 3\pi/2 \tag{4}$$

(fig. 48). Dans le sens de décroissance de φ (en pointillé sur la figure 48), on obtient dans le même disque la fonction

$$g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \qquad -3\pi/2 < \varphi < -\pi/2. \tag{5}$$

---

*) En effet, l'application $z \to w$ étant injective pour $\Delta z \neq 0$, on a $\Delta w \neq 0$ et par suite

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z/\Delta w}. \tag{*}$$

Puisque cette application est continue, Δw tend vers 0 avec Δz et si $\lim\limits_{\Delta w \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta w} = z'(w) \neq 0$, en faisant tendre Δz vers 0 dans (*) on trouve que $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = w'(z) = 1/z'(w)$.

En un même point $z \in U$ la deuxième valeur de $\varphi = \operatorname{Arg} z$ sera inférieure de 2π à la première, donc les valeurs de $f(z)$ et $g(z)$ seront opposées (au point $z = -1$ par exemple, dans le premier procédé de prolongement $\varphi = \pi$, donc $f(-1) = e^{i\pi/2} = i$, dans le second procédé $\varphi = -\pi$ et $g(-1) = e^{-i\pi/2} = -i$). On obtient des fonctions f et g distinctes selon que l'on choisit l'un ou l'autre de ces procédés de prolongement de f_0.

La nature de ce phénomène a été clairement comprise vers le milieu du XIXe siècle grâce aux éminents mathématiciens allemands. K. Weierstrass et B. Riemann. Arrêtons-nous brièvement sur la biographie du premier cité (celle du second sera abordée à la page 215).

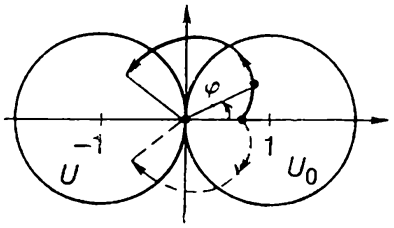

Fig. 48

Karl Théodor Weierstrass est né en 1815 dans la famille d'un fonctionnaire. Sur les instances de son père il s'inscrit en 1834 à la faculté de droit de l'Université de Bonn. Il néglige les cours et les examens au profit d'un travail personnel en mathématiques. En 1839 il passe à l'Académie de Münster qui préparait des professeurs de mathématiques. Il est seul à suivre le cours du professeur Guderman et en 1841-1842 réalise ses quatre premiers travaux scientifiques dans lesquels il démontre, en particulier, la représentation des fonctions holomorphes dans une couronne par des séries de puissances positives et négatives. Mais ces cahiers de Münster n'ont été publiés qu'en 1894.

Après un an de stage à Münster Weierstrass est affecté à un poste d'enseignant dans des gymnases provinciaux où il enseigne la botanique, la géographie, la calligraphie et même la gymnastique. Malgré un horaire très chargé, jusqu'à 30 heures par semaine, il s'adonne sérieusement aux mathématiques et publie quelques articles. En 1854 la fortune lui sourit : ses résultats sont reconnus et il obtient le grade de docteur sans soutenir de thèse et un congé sabatique.

En 1856 Weierstrass est nommé professeur à l'Institut professionnel de Berlin, puis, en 1864, à l'Université de cette ville. Les cours qu'il a dispensés à cette université durant 30 ans à part quelques interruptions pour cause de maladie, et ses activités scientifiques l'ont rendu universellement célèbre et lui ont attiré de nombreux élèves. En 1864 il est élu membre correspondant de l'Académie des sciences de Pétersbourg, entre 1870 et 1874 il donne des cours particuliers à Sophie Kovalevskaïa *) qu'il a honorée de son amitié tout au long de sa vie. En 1895 il est élu membre de l'Académie des sciences de Berlin.

*) Le conseil de l'Université de Berlin interdisait aux femmes d'assister aux cours.

Rigueur et esprit de suite, tels sont les traits majeurs de l'œuvre de Weierstrass. Il n'a pas publié beaucoup de travaux, mais il a obtenu des résultats fondamentaux en analyse réelle et complexe, en théorie des équations différentielles, en calcul des variations et en géométrie.

Weierstrass a commencé en 1861 à s'occuper des problèmes de prolongement analytique. Pour lever les indéterminations introduites par les fonctions multivalentes, il a posé à la base de sa théorie un système de séries entières spécialement liées entre elles. Plus exactement, Weierstrass a envisagé dans un disque U_a de centre a une fonction holomorphe $f(z)$ définie par son développement taylorien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{6}$$

et les représentations de cette série par des séries de $z - b$, où $b \in U$:

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n. \tag{7}$$

La série (7) converge dans un disque U_b de centre b et $f_b \equiv f$ dans l'intersection $U \cap U_b$.

Le disque U_b atteint visiblement la frontière de U et dans certains cas la coupe (fig. 49) : la fonction f_b sera alors le prolongement analytique de f au disque U_b*). En répétant cette procédure de prolongement analytique, on peut (comme dans l'exemple envisagé plus haut) aboutir à un disque V qui rencontre le disque initial U (ou même est confondu avec lui), mais aux points communs à U et V obtenir une fonction distincte de f. Pour ne pas avoir affaire aux fonctions multivalentes, il faut suivant Weierstrass veiller non seulement aux fonctions mais aussi aux disques dans lesquels elles sont définies.

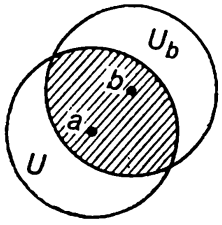

Fig. 49

Une dizaine d'années auparavant Riemann esquisse une approche géométrique d'étude des fonctions multivalentes. Il propose d'associer les nouvelles valeurs des prolongements analytiques des fonctions (disons les valeurs dans le disque V si l'on conserve les notations introduites plus haut) non pas aux anciens points z mais à des points situés au-dessus d'eux (supposer par exemple que le disque V

*) Si par exemple on développe la progression géométrique $1 + z + z^2 + \ldots$ qui converge dans le disque $\{|z| < 1\}$ vers la fonction $1/(1-z)$, en une série entière de $z + 1/2$, on obtient une série convergente dans le disque $\{|z + 1/2| < 3/2\}$ dont le rayon est égal à la distance du centre $a = -1/2$ au point $z = 1$ où la fonction perd son holomorphie.

est situé au-dessus de U). On obtient ainsi une surface à plusieurs feuillets située au-dessus du plan complexe et le nombre de feuillets au-dessus de chaque point z de ce plan est égal à la valeur prise en z par la fonction multivalente. Sur cette surface (appelée maintenant surface de Riemann) la fonction multivalente devient une véritable fonction univalente. Nous reviendrons sur cette question plus bas avec plus de détails.

Ainsi, l'idée maîtresse de la construction des fonctions multivalentes, avancée par Riemann et Weierstrass, consiste à envisager à la place de fonctions un nouvel être — un couple composé d'une fonction (univalente) et du domaine dans lequel elle est définie. De tels couples donneront par prolongement analytique probablement des fonctions analytiques multivalentes. Passons aux définitions rigoureuses.

Définition 1. On appellera *élément canonique* ou, plus brièvement, *élément* un couple $F = (U, f)$ composé d'un disque $U = \{ |z - a| < R\}$ et d'une fonction f, le disque U étant le plus grand disque de centre a à l'intérieur duquel la fonction f est holomorphe. Le point a s'appelle *centre* de l'élément F, le disque U, *disque* de F. La valeur $f(z)$ en $z \in U$ s'appelle *valeur* de l'élément F en z.

Si $a \in \mathbf{C}$, la fonction f se représente par une série de Taylor (5) dont U est le disque de convergence. Si $a = \infty$, ce développement est de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \tag{8}$$

et le disque $U = \{ |z| > R\}$ (cf. n° 25).

On a parfois intérêt à envisager un couple $F = (U, f)$, où f est une fonction holomorphe dans un disque U de centre a qui n'est pas le disque maximal d'holomorphie de centre a. Un tel couple s'appelle tout simplement *élément* ou, pour éviter toute ambiguïté, *élément non canonique*.

Définition 2. On dit que deux éléments $F = (U, f)$ et $G = (V, g)$ sont *consécutifs* ou *adjacents* ou encore le *prolongement analytique l'un de l'autre* si $U \cap V$ n'est pas vide et $f \equiv g$ dans $U \cap V$.

Si le centre b de l'élément G est contenu dans U, la fonction g s'exprime au moyen de f par la formule (7), i.e. la série de g n'est autre que la série de f suivant les puissances de $(z - b)$. Mais généralement b peut ne pas appartenir à U. Toutefois si U, f et V sont donnés, la fonction g est définie de façon unique car elle est confondue avec f sur $U \cap V$ (théorème d'unicité du n° 22).

Définition 3. On dit que des éléments $F_\nu = (U_\nu, f_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, l$, sont *enchaînés* si $F_{\nu+1}$ est consécutif à F_ν ($\nu = 1, \ldots, l-1$) (fig. 50).

Définition 4. On dit qu'un élément $G = (V, g)$ est un *prolongement analytique* de $F = (U, f)$ s'il existe une suite finie d'éléments enchaînés $F_\nu = (U_\nu, f_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, l$ avec $U_l = V$, $f_l = g$.

Exemple. Les éléments $F_0 = (U_0, f_0)$, où $U_0 = \{ |z-1| < 1\}$ et f_0 est la détermination de $\sqrt{z}$ définie dans (3), et $F = (U, f)$ où $U = \{ |z+1| < 1\}$ et f est la détermination de $\sqrt{z}$ définie dans

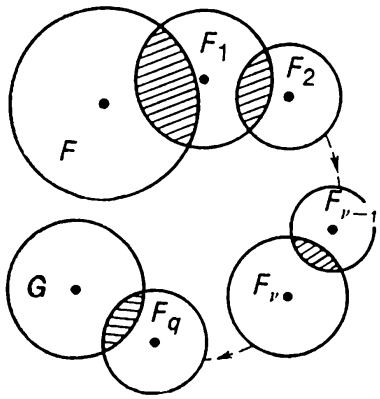

Fig. 50

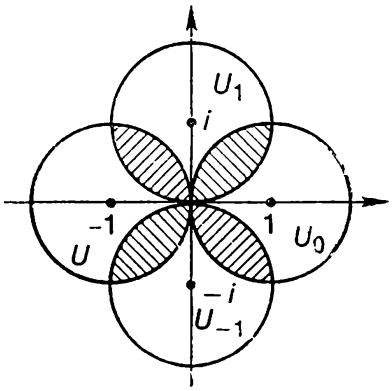

Fig. 51

(4), sont tous deux canoniques, car leurs frontières contiennent le point $z = 0$ auquel f et f_0 ne sont pas prolongeables (les dérivées $f_0'(z) = \frac{1}{2} f_0(z)$ et $f'(z)$ croissent indéfiniment lorsque $z \to 0$). Ils ne sont pas consécutifs, car leurs disques ne se rencontrent même pas. Mais l'élément $F_1 = (U_1, f_1)$, où $U_1 = \{ |z - i| < 1\}$ et

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < \pi \tag{9}$$

est visiblement consécutif aussi bien à F_0 qu'à F, donc F_0 et F sont enchaînés.

De façon analogue, l'élément $F_{-1} = (U_{-1}, f_{-1})$, où $U_{-1} = \{ |z + i| < 1\}$ et $f_{-1}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$, $-\pi < \varphi < 0$ (fig. 51) est consécutif à F_0 et à l'élément G défini dans (5). Donc l'existence de la suite d'éléments enchaînés F, F_1, F_0, F_{-1}, G exprime que F et G sont le prolongement analytique l'un de l'autre; leurs disques sont confondus, mais leurs fonctions diffèrent par leur signe.

28. Théorème de la monodromie. Nous aurons encore besoin de la notion de prolongement analytique le long d'un chemin. On supposera sans nuire à la généralité que le paramètre varie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ pour tous les chemins envisagés ici.

Définition 1. On dit qu'un élément canonique $F_0 = (U_0, f_0)$ *peut être prolongé le long d'un chemin* $\gamma : I \to \mathbf{C}$ partant de son centre $a = \gamma(0)$ s'il existe une famille d'éléments

$$F_t = (U_t, f_t), \quad t \in I, \tag{1}$$

de centres $a_t = \gamma(t)$ et de rayons non nuls vérifiant la condition suivante : si $u(t_0) \subset I$ est un voisinage connexe d'un point $t_0 \in I$ tel que $\gamma(t) \in U_{t_0}$ pour tout $t \in u(t_0)$ (ce voisinage existe, puisque le chemin est continu), alors pour tout $t \in u(t_0)$ l'élément F_t est consécutif à F_{t_0} (fig. 52).

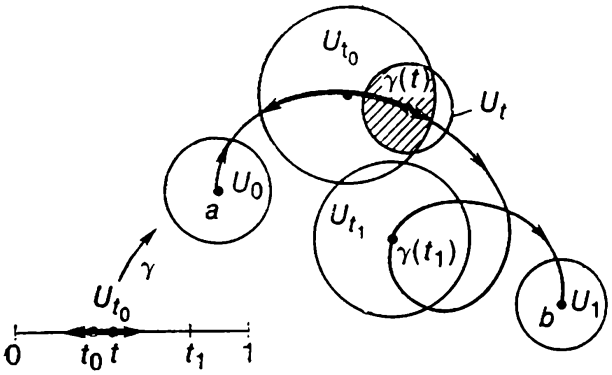

Fig. 52

Dans cette définition il est essentiel que F_t soit consécutif à F_{t_0} pour les seuls t proches de t_0 ; si le disque U_{t_0} contient un point éloigné de t_0, l'élément correspondant ne jouit pas nécessairement de cette propriété, bien que son disque rencontre U_{t_0}.

Si un élément F_0 peut être prolongé le long de γ, on dit que l'élément F_1 de la famille (1) (de centre l'extrémité $b = \gamma(1)$ de γ) provient de F_0 *par prolongement analytique le long de* γ.

Commençons par prouver l'unicité du prolongement le long d'un chemin. Pour cela on conviendra que deux éléments canoniques $F = (U, f)$ et $G = (V, g)$ sont *égaux* ($F = G$) si $U = V$ et $f \equiv g$ dans ce disque.

Théorème 1. *Le prolongement analytique d'un élément canonique* F_0 *le long d'un chemin* γ *est un élément bien défini ne dépendant pas du choix de la famille réalisant ce prolongement.*

▶ Soient F_1 et G_1 des éléments provenant du prolongement de F_0 le long de γ : le premier à l'aide d'une famille d'éléments F_t, le second, d'une famille G_t ($F_0 = G_0$, $t \in I$). Considérons l'ensemble $E = \{t \in I : F_t = G_t\}$. Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient le point $t = 0$.

Cet ensemble est ouvert (pour la topologie de I). En effet, soit $t_0 \in E$, i.e. $F_{t_0} = G_{t_0}$. Le chemin γ étant continu, il existe un voisinage $u(t_0) \subset I$ tel que pour tout $t \in u(t_0)$ le point $\gamma(t)$ appartient au disque commun de convergence des éléments F_{t_0} et G_{t_0}. D'après la définition 1, les éléments F_t et G_t sont pour tout $t \in u(t_0)$ consécutifs aux éléments égaux $F_{t_0} = G_{t_0}$ et par suite sont confondus (leurs fonctions s'obtiennent en développant f_{t_0} en série entière de $z - \gamma(t)$, cf. formule (7) du numéro précédent). Donc $u(t) \subset E$.

Mais E est à la fois fermé. En effet, soient $t_0 \in I$ un point d'accumulation de E et $u(t_0)$ un voisinage tel que pour tout $t \in u(t_0)$ les points $\gamma(t)$ appartiennent au plus petit des disques de convergence des éléments F_{t_0} et G_{t_0} (désignons-le par W). Dans $u(t_0)$ il existe un point $t_1 \in E$ tel que $F_{t_1} = G_{t_1}$. Puisque $\gamma(t_1) \in W$, il s'ensuit que F_{t_0} et G_{t_0} sont consécutifs aux éléments égaux F_{t_1} et G_{t_1}. Donc $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ dans l'intersection de W avec le disque de convergence de F_{t_1} et G_{t_1}. D'après le théorème d'unicité du n° 22 on a alors $f_{t_0} \equiv g_{t_0}$ partout dans W et par conséquent $F_{t_0} = G_{t_0}$, i.e. $t_0 \in E$.

Ainsi l'ensemble non vide $E \subset I$ est à la fois ouvert et fermé. D'où il suit (n° 4) que $E \equiv I$ et en particulier que $F_1 = G_1$. ◀

On se propose de prouver maintenant que le prolongement le long d'un chemin peut toujours être réalisé en un nombre fini d'opérations, i.e. comme un prolongement analytique au sens du numéro précédent.

Lemme. *Le rayon $R(t)$ de l'élément canonique F_1 de la famille* (1) *réalisant le prolongement analytique le long de γ est une fonction continue de t sur I ou est identiquement égal à l'infini.*

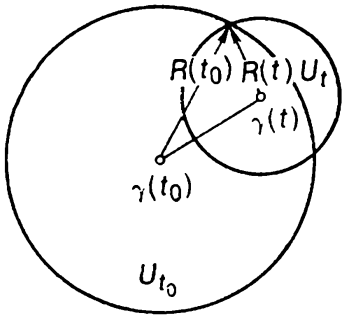

Fig. 53

▶ Si $R(t_0) = \infty$ pour un $t_0 \in I$, la fonction correspondante f_{t_0} est entière et d'après le théorème d'unicité toutes les fonctions f_t sont entières, i.e. $R(t) \equiv \infty$. Pour prouver le lemme dans le cas contraire, on remarquera que les disques des deux éléments canoniques F_{t_0} et F_t qui sont consécutifs ne peuvent appartenir proprement l'un à l'autre. En effet, si par exemple $U_t \subsetneqq U_{t_0}$, alors f_t est holomorphe dans un disque de centre $\gamma(t)$ plus grand que U_t, à la rigueur dans un disque de même centre tangent intérieurement à ∂U_{t_0}. Donc les cercles ∂U_{t_0} et ∂U_t doivent avoir au moins un point commun, et du triangle représenté sur la figure 53 (triangle qui dégénère en segment si U_t est tangent intérieurement à ∂U_{t_0}) on déduit que

$$|R(t) - R(t_0)| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(t_0)|. \tag{2}$$

Par définition du prolongement le long d'un chemin, les éléments F_t sont consécutifs à F_{t_0} si $t \in u(t_0)$, où $u(t_0)$ est le voisinage mentionné dans la définition. Donc (2) a lieu pour tout $t_0 \in I$ et tout $t \in u(t_0)$. Reste à utiliser la continuité de la fonction γ sur I. ◀

Théorème 2. *Si un élément G provient de F par un prolongement analytique le long d'un chemin γ, il est le prolongement analytique de F au sens du* n° 27.

▶ Soit F_t, $t \in I$, une famille d'éléments réalisant le prolongement le long de γ. Si $R(t) \equiv \infty$, la proposition est triviale, sinon le lemme nous dit que le rayon $R(t)$ de l'élément F_t est continu sur I. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $R(t) \geqslant \varepsilon$ pour tout $t \in I$. La fonction γ étant uniformément continue sur I, on peut choisir un nombre fini de points $t_\nu : t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tels que pour tout couple $t', t'' \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, n$, l'on ait $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon$. De la définition du prolongement le long d'un chemin il s'ensuit alors que l'élément $F^{(\nu)} = F_{t_\nu}$ est consécutif à

$$F^{(\nu-1)} = F_{t_{\nu-1}} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Mais $F^{(0)} = F$ et $F^{(n)} = G$, donc G est le prolongement analytique de F. ◀

Prouvons en conclusion le théorème d'invariance du prolongement analytique le long d'un chemin par toute déformation homotope de ce chemin.

Théorème 3. *Soient γ_0 et γ_1 des chemins homotopes en tant que chemins ayant des extrémités communes et supposons qu'un élément F peut être prolongé le long de tout chemin γ_s $(s \in I)$ réalisant l'homotopie $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Alors les prolongements de F le long des chemins γ_0 et γ_1 sont confondus.*

▶ Soit $\gamma : I \times I \to \mathbf{C}$ une fonction réalisant l'homotopie $\gamma_0 \sim \gamma_1$ (cf. n° 17), de sorte que $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$.

Désignons par G_t^s la famille des éléments réalisant le prolongement analytique de F le long de γ_s, et par $G^s = G_1^s$ ce prolongement. Démontrons que sous les hypothèses du théoreme le prolongement G^s ne varie pas par une variation assez petite de s: la connexité du segment I entraîne l'indépendance de G^s par rapport à s, i.e. $G^0 = G^1$. Ce qu'on voulait.

La fonction γ étant uniformément continue sur $I \times I$, les rayons de tous les élements G_t^s sont supérieurs à un $\varepsilon > 0$. Pour la même raison, quel que soit $s_0 \in I$ il existe un voisinage $u(s_0) \subset I$ tel que pour tout $s \in u(s_0)$ et tout $t \in I$ l'on a

$$|\gamma(s, t) - \gamma(s_0, t)| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Comme dans le théorème 2, cherchons des points $t_\nu \in I$ $(\nu = 0, \ldots, n)$ tels que pour tous $t', t'' \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$ et tout $s \in u(s_0)$ l'on ait

$$|\gamma(s, t') - \gamma(s, t'')| < \varepsilon/2 \tag{4}$$

et posons $z_\nu^0 = \gamma(s_0, t_\nu)$, $z_\nu = \gamma(s, t_\nu)$ (fig. 54). Posons encore pour simplifier $G_{t_\nu}^\varepsilon = G_\nu^s$ et $G_{t_\nu}^{s_0} = G_\nu^{s_0}$.

Il est évident que $G_1^{s_0}$ et G_1^s sont consécutifs: en vertu de (4) on a $|z_1^0 - a| < \varepsilon/2$ et $|z_1 - a| < \varepsilon/2$, de sorte que ces deux éléments proviennent de F par le redéveloppement des séries mentionné au numéro précédent. Raisonnons par récurrence et supposons que $G_{\nu-1}^{s_0}$ et $G_{\nu-1}^s$ sont des éléments consécutifs; alors puisque $|z_{\nu-1} - z_{\nu-1}^0| < \varepsilon/2$ en vertu de (3), l'élément $G_{\nu-1}^s$ provient de $G_{\nu-1}^{s_0}$ par redéveloppement de la série. Les éléments $G_\nu^{s_0}$ et G_ν^s sont par construction consécutifs respectivement à $G_{\nu-1}^{s_0}$ et $G_{\nu-1}^s$. Or en vertu de (3) et (4) on a $|z_\nu^0 - z_{\nu-1}^0| < \varepsilon/2$ et $|z_\nu - z_{\nu-1}^0| \leqslant |z_\nu - z_\nu^0| + |z_\nu^0 - z_{\nu-1}^0| < \varepsilon$, donc $G_\nu^{s_0}$ et G_ν^s proviennent de $G_{\nu-1}^{s_0}$ par redéveloppement de la série

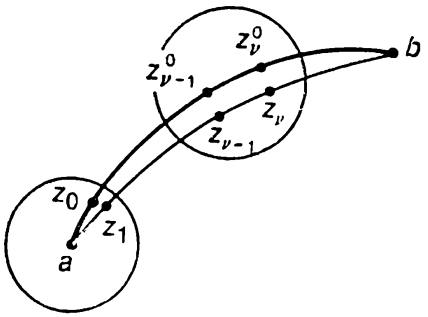

Fig. 54

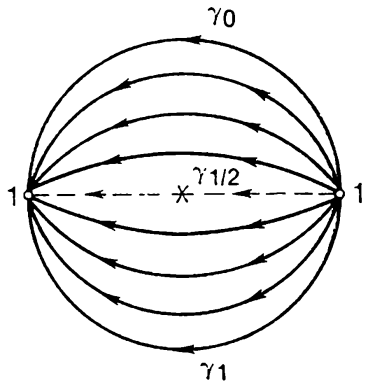

Fig. 55

et par suite sont cosécutifs. Donc par récurrence les éléments $G_\nu^{s_0}$ et G_ν^s ($\nu = 1, \ldots, n$) sont consécutifs et puisque $G_n^{s_0}$ et G_n^s ont le même centre (le point b), ils sont égaux. ◀

Remarque. Si un élément F ne peut être prolongé au moins le long d'un des chemins γ_s réalisant l'homotopie $\gamma_0 \sim \gamma_1$, ses prolongements le long de γ_0 et γ_1 peuvent être différents. En effet, soient γ_0 et γ_1 les demi-cercles supérieur et inférieur de $\{ |z| = 1 \}$. Ils sont visiblement homotopes et leur homotopie peut être réalisée par les arcs de cercle γ_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$ passant par les points ± 1 (fig. 55). Supposons pour fixer les idées que $\gamma_{1/2}$ est le segment $[1, -1]$.

L'élement $F_0 = (U_0, f_0)$ de l'exemple du n° 27, où $U_0 = \{ |z - 1| < 1 \}$ et f_0 est la détermination de $\sqrt{z}$ définie par la condition $-\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$, est prolongeable analytiquement le long de tout chemin γ_s, $s \neq 1/2$ (pour un tel prolongement il suffit, comme déjà signalé plus haut, de faire varier continûment $\operatorname{Arg} z$ le long d'un arc). Le prolongement le long du segment $\gamma_{1/2}$ est impossible, car celui-ci contient le point $z = 0$ (cf. page 153). Le théorème 3 ne passe pas pour cette cause, quant aux prolongements le long de γ_0 et γ_1,

ils sont différents: ces prolongements sont les éléments F et G dans les notations de l'exemple de la page 153. En effet, on obtient F le long des chemins γ_s tels que $0 \leqslant s < 1/2$ et G le long des chemins γ_s tels que $1/2 < s \leqslant 1$.

Les chemins d'extrémités communes sont homotopes dans un domaine D simplement connexe. Du théorème 3 on déduit en particulier le

Théorème 4. *Si un élément F_0 peut être prolongé analytiquement le long d'un chemin quelconque dans un domaine simplement connexe D (partant du centre de F_0), son prolongement ne dépend pas du chemin suivi, il est défini de façon unique par les extrémités de ce chemin.*

Ce théorème s'appelle généralement *théorème de la monodromie* (en grec δρόμος, i.e. lieu de course). On pourrait l'appeler théorème étroit de la monodromie, réservant la dénomination ordinaire pour le théorème 3 qui est plus général.

§ 9. Fonctions analytiques

La théorie du prolongement analytique décrite dans le paragraphe précédent permet d'introduire le concept de fonction multivalente décantée des ambiguïtés et des inconvénients signalés plus haut. Cette théorie est basée sur la notion de fonction analytique, une notion qui, vue sous un angle moderne, n'est pas très heureuse dans la mesure où elle décrit non pas une fonction, mais un tout autre être — un ensemble d'éléments liés l'un à l'autre par un prolongement analytique.

29. Notion de fonction analytique. Ainsi, par convention

Définition 1. Une *fonction analytique* est un ensemble $\mathscr{F}$ d'éléments canoniques provenant d'un élément $F = (U, f)$ par des prolongements analytiques le long de tous les chemins partant du centre a de F.

Cette notion ne dépend visiblement pas du choix de l'élément de départ F. En effet, soit $G = (V, g)$ un élément quelconque de la fonction analytique $\mathscr{F}$. Cet élément provient alors de F par prolongement le long d'un chemin γ. Mais F provient aussi de G par prolongement le long du chemin γ^- et tout autre élément H, prolongement de F le long d'un chemin λ, peut être obtenu en prolongeant G le long du chemin $\gamma^- \cup \lambda$ (pour la définition de la réunion des chemins voir le n°15).

On voit donc qu'on peut définir une fonction analytique par la simple donnée de ses éléments: $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$, où A est un ensemble arbitraire d'indices. On appelle parfois l'être de la définition 1 *fonction analytique complète* réservant le terme de fonction analytique

à tout sous-ensemble d'éléments de $\mathcal{F}$, connexe en ce sens que deux quelconques de ses éléments sont enchaînés.

Définition 2. Deux fonctions analytiques sont *égales* si elles possèdent au moins un élément commun. (Les autres éléments correspondants seront alors égaux d'après le théorème d'unicité du prolongement le long d'un chemin.)

Le réunion $D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ des disques des éléments de la fonction analytique $\mathcal{F}$ est un domaine. En effet, il est évident que D est ouvert, quant à sa connexité, elle résulte du fait que deux points quelconques z', $z'' \in D$ peuvent être reliés par une ligne polygonale contenue dans la réunion des disques des éléments de la chaîne et réalisant en vertu du théorème 2 du n° 28 le prolongement analytique des éléments $F_{\alpha'}$ et $F_{\alpha''}$ (tels que z' et z'' appartiennent à leurs disques respectifs).

Si le domaine D est simplement connexe et qu'un élément quelconque $F_0 = (U_0, f_0)$ de disque $U \subset D$ peut être analytiquement prolongé le long de tous les chemins dans D, la fonction analytique $\mathcal{F}$ qui est composée de tous les prolongements de F_0 le long des chemins de D sera, d'après le théorème de la monodromie du numéro prcécédent, une fonction holomorphe dans D : en tout point $z \in D$ les éléments $F \in \mathcal{F}$ dont les disques contiennent z prennent la même valeur. Il en va autrement dans le cas général lorsque les conditions du théorème de la monodromie ne sont pas remplies: les éléments de la fonction analytique $\mathcal{F}$ peuvent prendre des valeurs différentes en un même point (exemple: la fonction $\sqrt{z}$ qui a été citée à plusieurs reprises dans les numéros précédents). On dit alors que $\mathcal{F}$ est une fonction analytique multivalente dans D.

Mais même si $\mathcal{F}$ est multivalente dans D, il peut exister des sous-domaines $G \subset D$ tels que les prolongements des éléments de $\mathcal{F}$ le long des chemins uniquement de G donnent une fonction univalente, donc holomorphe dans G*). Ces fonctions s'appellent *déterminations* de la fonction analytique $\mathcal{F}$. Par exemple, les déterminations de $\mathcal{F}$ peuvent être mises en évidence à l'aide du théorème de la monodromie dans tout sous-domaine simplement connexe $G \subset D$ s'il existe des éléments $F \in \mathcal{F}$ prolongeables le long de tous les chemins dans G (en particulier, on peut définir une détermination dans tout disque d'un élément $(U, f) \in \mathcal{F}$, c'est tout simplement la fonction f).

Si une fonction analytique est multivalente, les disques de ses éléments contiennent des points en lesquels ces éléments prennent des valeurs différentes. La question se pose de savoir combien de va-

---

*) Remarquons que les prolongements le long de chemins quittant le sous-domaine G peuvent conduire à des éléments prenant des valeurs différentes en $z \in G$: voir des exemples dans le numéro précédent.

leurs peut prendre une fonction analytique en un point fixé. La réponse est fournie par le

Théorème 1 (Poincaré — Volterra *)). *Une fonction analytique peut posséder un nombre au plus dénombrable d'éléments centrés en un point donné.*

◀ Supposons qu'une fonction analytique est définie par un élément initial F_0 de centre a et soit z un point arbitraire du domaine D formé par les disques des éléments obtenus en prolongeant F_0. D'après le théorème 2 du n° 28, tout élément F de centre z peut être obtenu par une chaîne finie d'éléments consécutifs de centres a, $z_1, \ldots, z_{n-1}, z$.

Sans nuire à la généralité on peut admettre que les points z_ν ($\nu = 1, \ldots, n-1$) sont rationnels (i.e. Re z_ν et Im z_ν sont des nombres rationnels). En effet, supposons tout d'abord que les centres z'_ν des éléments F'_ν ($\nu = 1, \ldots, n-1$) sont arbitraires. Dans un voisinage arbitrairement petit de chaque point z'_ν prenons un point rationnel z_ν et remplaçons F'_ν par son élément consécutif F_ν de centre z_ν. Il est clair (cf. démonstration du théorème 3 du n° 28) que pour $|z'_\nu - z_\nu|$ assez petits, le prolongement obtenu avec la nouvelle chaîne sera confondu avec l'ancien.

Reste à remarquer que l'ensemble des éléments consécutifs possibles de F_1 de centres rationnels est dénombrable, de même d'ailleurs que les ensembles des éléments $F_2, \ldots, F_{n-1}$. Puisque la donnée de F_{n-1} et du point z définit de façon unique l'élément F (bien que des éléments F_{n-1} distincts puissent conduire à de mêmes F), l'ensemble des éléments possibles de F est au plus dénombrable. ◀

Dans le numéro suivant on citera un exemple de fonction analytique associant aux points d'un domaine D un ensemble infini (dénombrable) de valeurs.

La généralisation de la notion d'élément est utile dans l'étude des fonctions analytiques. Plus exactement, par *élément* d'une fonction analytique $\mathcal{F}$ on peut comprendre tout couple $F = (D, f)$, où $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ est un domaine arbitraire et f une détermination de $\mathcal{F}$, holomorphe dans ce domaine (on admet bien sûr qu'une telle détermination holomorphe existe dans D). Tout couple (D, f), où $f \in \mathcal{O}(D)$, s'appelle tout simplement *élément analytique*. On dit que deux tels éléments (D, f) et (G, g) sont consécutifs si l'intersection $D \cap G$ n'est pas vide et si dans l'une au moins des composantes connexes de cette intersection on a $f \equiv g$ (les fonctions f et g ne sont pas nécessairement confondues dans les autres composantes si elles existent; cf. fig. 56).

---

*) Ce théorème a été publié en 1888 séparément par H. Poincaré et le mathématicien italien Vito Volterra (1860-1940).

Le prolongement analytique se définit comme dans le cas où D est un disque (cf. définition 3 du n° 27).

Cependant il est utile d'introduire une notion qui nous dispense du choix d'un domaine concret. Ceci nous conduit à la

Définition 3. On dit que deux éléments (D, f) et (G, g) dont les domaines contiennent un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$ sont *équivalents en a* s'il existe un voisinage de a en lequel $f \equiv g$ *). L'ensemble des éléments équivalents en $a \in D$ à (D, f) s'appelle *germe de la fonction analytique* en a et se note $\mathbf{f}_a$.

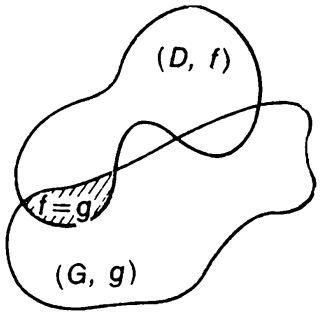

Fig. 56.

La notion de germe est une localisation de la notion d'éléments : en considérant à la place d'un élément fixé la classe de tous les éléments qui sont équivalents (y compris les éléments dont les domaines sont arbitrairement petits), on met en évidence ce que les éléments équivalents ont en commun. Donc le germe caractérise les propriétés d'une fonction au point envisagé. Il est évident que le germe $\mathbf{f}_a$ peut être identifié à une collection de nombres complexes $f^{(k)}(a)$, caractérisant les coefficients du développement de la fonction f en série de Taylor au point a.

Une fonction analytique est entièrement restituée par son germe $\mathbf{f}_a$: il suffit de prendre un élément quelconque (D, f) représentant $\mathbf{f}_a$ et de construire tous ses prolongements analytiques possibles. Réciproquement, à toute fonction analytique en un point z de la réunion des domaines de ses éléments, on peut associer un ensemble de germes $\mathbf{f}_z$, classes d'équivalence de ces éléments en z (cet ensemble est au plus dénombrable d'après le théorème 2). On peut donc traiter une fonction analytique comme l'ensemble de ses germes (voir la fin du chapitre pour plus de détails).

Les germes des fonctions analytiques en un point fixé $z \in \mathbf{C}$ sont justiciables des opérations ordinaires de l'analyse. Ainsi, par dérivée $\mathbf{f}'_z$ du germe $\mathbf{f}_z$ on comprend la classe des éléments équivalents à (D, f'), où (D, f) est un représentant de la classe $\mathbf{f}_z$ (il est évident que $\mathbf{f}'_z$ ne dépend pas du choix du représentant). On définit de façon analogue la somme $\mathbf{f}_z + \mathbf{g}_z$ et le produit $\mathbf{f}_z \cdot \mathbf{g}_z$ (par exemple, $\mathbf{f}_z + \mathbf{g}_z$ est la classe des éléments équivalents à $(U, f + g)$, où (D, f) et (G, g) sont des représentants de $\mathbf{f}_z$ et $\mathbf{g}_z$ tels que $D \cap G$ contient un voisinage U de z). Le quotient $\mathbf{f}_z/\mathbf{g}_z$ n'est pas toujours défini : il ne l'est pas pour les germes $\mathbf{g}_z$ qui sont nuls au point z.

Donc, l'ensemble des germes des fonctions analytiques en un point fixé z est muni d'une structure d'anneau. On le désignera par le

*) Il est évident que cette relation est une relation d'équivalence.

même symbole $\mathcal{O}_z$ que l'anneau des fonctions holomorphes en z (cf. n° 6) : en fait il s'agit d'un même être.

Les opérations sur les fonctions analytiques (et non pas sur leurs germes) ne sont pas toujours définies ; considérons à titre d'exemple l'addition de deux fonctions analytiques. Il faut d'abord pouvoir choisir des éléments de ces fonctions définis sur un même domaine. Soient (D, f) et (D, g) de tels éléments. Les fonctions holomorphes f et g de ces éléments sont des *déterminations* des fonctions analytiques envisagées dans le domaine D : on peut les additionner et former l'élément $(D, f+g)$. L'ensemble des éléments obtenus à partir de $(D, f+g)$ par tous les prolongements analytiques possibles forme une nouvelle fonction analytique qui est naturellement considérée comme la somme de f et n. Mais une telle définition doit être cohérente, i.e. ne pas dépendre du choix des éléments initiaux, or cette condition n'est pas toujours remplie.

Par exemple, la fonction $\sqrt{z}$ étudiée plus haut possède, en vertu du théorème de la monodromie, deux déterminations f_1 et f_2 dans tout domaine simplement connexe $D \subset \mathbf{C}$ ne contenant pas le point $z = 0$ et ces déterminations sont opposées. La somme $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ nous conduit donc aux éléments $(D, 2f_1)$, $(D, 2f_2)$ et $(D, 0)$. Si les deux premiers éléments nous conduisent par prolongement à une même fonction analytique désignée par $2\sqrt{z}$, le troisième nous donne une fonction identiquement nulle. Donc l'addition $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ n'est pas cohérente.

Signalons que la condition de cohérence est visiblement remplie si les fonctions analytiques sont ajoutées à des fonctions holomorphes ou multipliées par elles. Sont également cohérentes les compositions de fonctions holomorphes et de fonctions analytiques : par exemple, les fonctions analytiques telles que $e^{\sqrt{z}}$ ou $\cos\sqrt{z}$ (la dernière est même holomorphe).

30. Fonctions élémentaires. Nous étudions ici les plus importants exemples de fonctions analytiques multivalentes.

1. Racine. Par racine n-ième (n est un entier naturel) de z on comprend la fonction analytique

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{1}$$

définie comme suit. Dans le plan $\mathbf{C}$ privé du demi-axe négatif $\mathbf{R}_-$, i.e. $D_0 = \overline{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{R}_-$ considérons la fonction

$$f_0(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}, \qquad -\pi < \varphi < \pi \tag{2}$$

(nous admettons que $z = re^{i\varphi}$). Cette fonction est continue dans D_0 et applique bijectivement D_0^* sur le secteur $D_0^* = \{-\pi/n < \varphi <$

$< \pi/n\}$ du plan de la variable complexe $w = \rho e^{i\psi}$ (fig. 57). Puisque $w^n = z$, la règle de dérivation de la fonction réciproque pour tout $z \in D_0$ nous dit que

$$f_0(z) = \frac{1}{n\{f_0(z)\}^{n-1}} \tag{3}$$

(cf. note de la page 149). Donc le couple $F_0 = (D_0, f_0)$ est un élément analytique. La fonction analytique provenant du prolongement analytique de cet élément s'appelle *racine n-ième de z*.

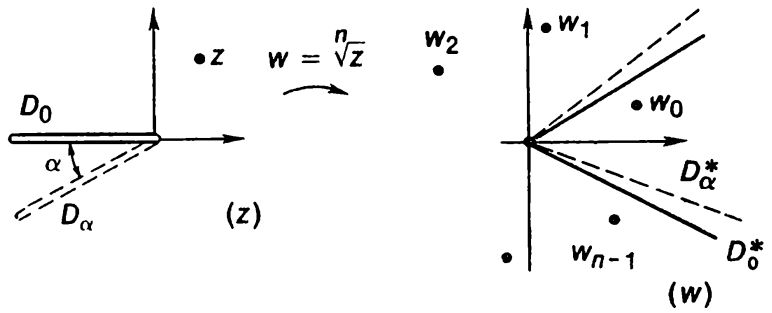

Fig. 57.

On peut décrire ce prolongement par exemple de la manière suivante. Considérons un domaine $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ et dans ce domaine la fonction holomorphe

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}, \qquad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \tag{4}$$

Il est évident que les éléments $F_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sont le prolongement analytique de l'élément (D_0, f_0) (pour $|\alpha| < \pi$ ces éléments sont consécutifs). L'ensemble de ces éléments F_α décrit précisément la fonction voulue.

La réunion $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} D_\alpha$ des domaines de ces éléments est visiblement le plan $\overline{\mathbf{C}}$ privé des points $z = 0$ et $z = \infty$ (ce sont les seuls points de $\overline{\mathbf{C}}$ à appartenir aux frontières de tous les D_α et à n'appartenir à aucun D_α).

Cette fonction peut être également définie à l'aide des éléments canoniques. Prenons pour élément initial par exemple l'élément G_0 de centre $z = 1$ composé du disque $U = \{|z - 1| < 1\}$ et de la fonction holomorphe dans U

$$g_0(z) = \{1 + (z-1)\}^{1/n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right)(z-1)^k \tag{5}$$

(remarquant que $g_0(x) = \sqrt[n]{x}$ pour $z = x > 0$, nous nous sommes servis du développement binomial de cette fonction réelle et avons prolongé ce développement du segment $[0, 2]$ au disque U).

L'élément $G_0 \sim F_0$, car pour $z = x \in [0, 2]$ on a $r = x$, $\varphi = 0$ et par suite $f_0(x) = g_0(x) = \sqrt[n]{x}$. Les fonctions f_0 et g_0 étant holomorphes dans U, le théorème d'unicité nous dit que $f_0(z) = g_0(z)$ pour tout $x \in U$. Les fonctions analytiques définies par les éléments F_0 et G_0 sont confondues d'après la définition 2 du numéro précédent.

La fonction analytique $w = \sqrt[n]{z}$ associe à tout point $z_0 \in D$ exactement n valeurs distinctes. En effet, les valeurs de toutes les fonctions

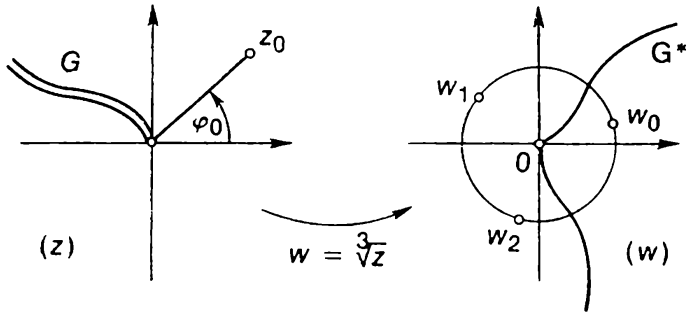

Fig. 58

holomorphes des éléments F_α (les déterminations de la fonction analytique envisagée) sont définies par la formule

$$w = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}}, \tag{6}$$

où $r_0 = |z_0|$, φ_0 est l'une des valeurs possibles de Arg z_0 et k, un entier arbitraire. En posant $w_0 = \sqrt[n]{r_0} e^{i\frac{\varphi_0}{n}}$, on voit que toutes les autres valeurs de w diffèrent de w_0 par les facteurs $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$, et ces facteurs (les racines n-ièmes de 1) proviennent du vecteur 1 par des rotations d'angle multiple de $\frac{2\pi}{n}$, i.e. prennent n valeurs distinctes. Donc parmi les valeurs (6) il en existe seulement n qui sont distinctes, il s'agit des valeurs $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ obtenues à partir de (6) pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ces valeurs sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre $w = 0$ (cf. fig. 58).

Quelques mots en conclusion sur les déterminations de la fonction analytique $\sqrt[n]{z}$, i.e. sur les fonctions holomorphes de ses éléments (pas nécessairement des éléments de $\mathcal{F}_a$).

D'après le théorème de la monodromie (n° 28) on peut définir une détermination de $\sqrt[n]{z}$ dans tout domaine simplement connexe G ne contenant pas les points $z = 0$ et $z = \infty$. Comme exemple d'un tel

domaine citons le plan muni d'une coupure reliant ces points (la frontière du domaine doit être connexe). La figure 58 représente un tel domaine G et son image par l'application réalisée par l'une des déterminations de $\sqrt[3]{z}$; les deux autres déterminations transforment G respectivement en les domaines $e^{\frac{2\pi i}{3}} G^*$ et $e^{\frac{4\pi i}{3}} G^*$, images de G^* par des rotations d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

D'une façon générale, *on peut définir une détermination de* $\sqrt[n]{z}$ *dans tout domaine ne contenant aucun chemin fermé entourant le point* $z = 0$. En effet, Arg z varie d'un multiple entier de 2π en parcourant ces chemins et lux seuls, donc le prolongement analytique de tout élément le long de ces chemins peut nous conduire à un autre élément. Dans les domaines remplissant cette condition on peut définir n déterminations distinctes de $\sqrt[n]{z}$. Chacune de ces déterminations diffère des autres par les facteurs $e^{i2\pi k/n}$ et est entièrement caractérisée par la donnée de son domaine de définition et sa valeur en un point de ce domaine. (Par exemple, on peut parler de la détermination de $\sqrt[3]{z}$ qui est définie dans le plan $\mathbf{C}$ muni d'une coupure le long du demi-axe négatif $\mathbf{R}_-$ et est égale à 1 pour $z = 1$; les deux autres déterminations prennent respectivement les valeurs $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.)

Les racines sont justiciables des opérations signalées à la fin du numéro précédent. En particulier, la dérivée

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz}, \tag{7}$$

qui est aussi une fonction analytique, est définie de façon cohérente.

✱ 1. Montrer que $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}$, où $0 < k < 1$, possède des déterminations dans $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1/k, 1/k]$. Considérons la détermination qui prend des valeurs > 0 pour $z = x > 1/k$; quelles valeurs prend-elle sur les lèvres inférieure et supérieure de la coupure $[-1/k, 1/k]$ et sur l'axe $]-\infty, -1/k[$?

2. Préciser la relation de Bombelli citée en note de la page 15. ✱

2. Logarithme. Le logarithme de la variable complexe z

$$w = \ln z \tag{8}$$

peut être défini par le prolongement analytique d'un élément initial composé du domaine $D_0 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ et de la fonction défi-

nie dans D

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \tag{9}$$

qui s'appelle *détermination principale* du logarithme (on admet comme plus haut que $z = re^{i\varphi}$). La fonction (9) applique homéomorphiquement D_0^* sur la bande $D_0 = \{w : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ (fig. 59) et comme les propriétés de la fonction exponentielle (n° 13) nous disent que $e^w = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = z$, i.e. que la fonction (9) est inverse

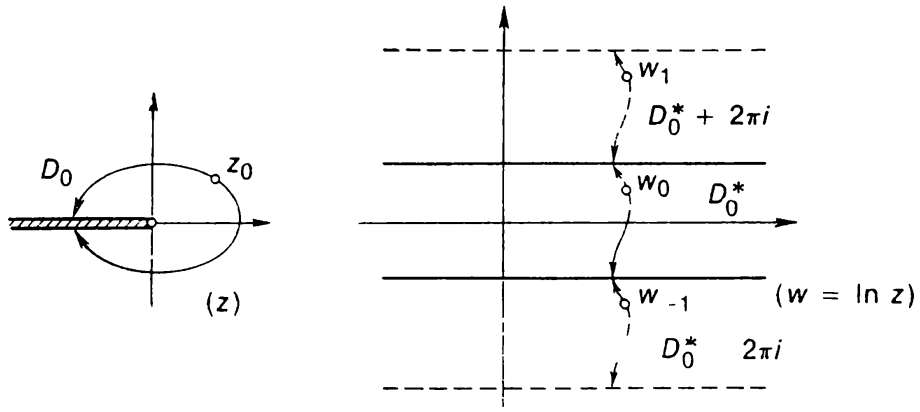

Fig. 59

de l'exponentielle, on en déduit en vertu de la règle de dérivation des fonctions inverses en tout point $z_0 \in D_0$ que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Ln} z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{10}$$

Donc l'élément $F_0 = (D_0, \operatorname{Ln} z)$ est analytique.

On peut comme plus haut définir un prolongement analytique de F_0 à l'aide d'une famille d'éléments F_α ($\alpha \in \mathbf{R}$) composés des domaines $D_\alpha = (-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ et des fonctions $f_\alpha(z) = \ln r + i\varphi$, $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$, holomorphes dans D_α. La réunion des domaines de ces éléments est le plan $\overline{\mathbf{C}}$ privé des points $z = 0$ et $z = \infty$.

On peut définir $\ln z$ également à l'aide des éléments canoniques. Pour élément initial on peut prendre le disque $U = \{|z - 1| < 1\}$ et la fonction holomorphe dans U

$$\operatorname{Ln} z|_U = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \tag{11}$$

(cette fonction provient du prolongement analytique de la fonction réelle

$$\ln x = \ln\{1 + (x-1)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

du diamètre [0, 2] au disque U). Les éléments $(D_0, \operatorname{Ln} z)$ et $(U, \operatorname{Ln} z\,|_U)$ sont équivalents.

La fonction analytique $\ln z$ associe à tout point $z_0 \in D = \bigcup D_\alpha$ un ensemble dénombrable de valeurs définies par la formule

$$w = \ln r_0 + i\,(\varphi_0 + 2k\,\pi), \tag{12}$$

où $r_0 = |\,z_0\,|$, φ_0 est l'une des valeurs possibles de $\arg z_0$, k un entier arbitraire. Toutes ces valeurs sont distinctes et situées sur la droite verticale $\operatorname{Re} w = \ln r_0$ à une distance de $2k\pi$ l'une de l'autre (fig. 59). Toutes ces valeurs sont les logarithmes du nombre z_0; donc *tout nombre complexe fini, hormis* $z = 0$, *possède une infinité de logarithmes.*

On peut définir les déterminations de la fonction analytique $\ln z$ dans tout domaine G ne renfermant aucun chemin fermé englobant le point $z = 0$. En effet, le prolongement le long uniquement d'un tel chemin peut donner d'un élément canonique un autre élément de même centre non égal au premier. Dans tout domaine G remplissant la condition indiquée, on peut définir une infinité de déterminations de $\ln z$ différant l'une de l'autre d'une constante additive égale à un multiple entier de $2\pi i$. Donc les déterminations sont, comme celles de $\sqrt[n]{z}$, définies de façon unique par la donnée du domaine de définition et une valeur en un point de ce domaine *).

On peut effectuer sur les logarithmes les opérations mentionnées au n° 29. En particulier, la dérivée du logarithme

$$(\ln z)' = 1/z \tag{13}$$

est une fonction holomorphe dans D (toutes les déterminations du logarithme ont la même dérivée). Est holomorphe aussi la fonction

$$e^{\ln z} \equiv z. \tag{14}$$

En ce sens on peut dire par abus de langage que le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle **).

✱ Montrer que toute fonction entière ne présentant pas de zéros peut être représentée sous la forme $f = e^g$, où g est une fonction entière. ✱

---

*) Ceci n'est pas valable pour toutes les fonctions analytiques. Par exemple, la fonction analytique $e^{\sqrt{z}}$ possède en $z_0 = -\pi^2$ deux déterminations distinctes correspondant aux valeurs $\sqrt{z_0} = \pm\pi i$, mais les valeurs $e^{\pm\pi i}$ de ces déterminations en z_0 sont confondues.

**) Plus exactement, le second membre de (14) est la restriction de la fonction au domaine D, car le premier membre n'est pas défini pour $z = 0$ et $z = \infty$.

La situation n'est pas aussi favorable pour les opérations algébriques sur les logarithmes. Par exemple, l'égalité « naturelle »

$$\ln z + \ln z = 2 \ln z$$

est incorrecte! En effet, le premier membre de cette égalité n'est pas défini (cf. n° 29).

Nous allons fermer cette section consacrée au logarithme par le rappel d'un débat sur les logarithmes des nombres négatifs qui opposa par correspondance en 1712-1713 deux des plus grands mathématiciens de leur temps Jean Bernoulli et G. Leibniz. Bernoulli affirma qu'ils étaient réels et que $\ln(-x) = \ln x$. Il étaya cette affirmation par le raisonnement suivant: l'égalité $(-x)^2 = x^2$ entraîne $2 \ln(-x) = 2 \ln x$. Leibniz pour sa part affirma que les logarithmes des nombres négatifs étaient imaginaires et que l'identité $\ln(-x) = \ln x$ n'a pas de sens et, en particulier, $\ln(-1) \neq 0$. Leibniz appuya son affirmation par le raisonnement suivant: si l'on pose $x = -2$ dans le développement

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

on obtient l'égalité

$$\ln(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots,$$

dans laquelle tous les termes du second membre sont négatifs et donc $\ln(-1) \neq 0$.

L. Euler se mêla du débat en 1749. Il publia un article dans lequel il renvoyait dos à dos les deux « plaideurs ». Il réfuta notamment l'argument de Bernoulli de la manière suivante. En suivant le raisonnement de Bernoulli on déduirait de l'égalité $(x\sqrt{-1})^4 = x^4$ que $\ln x + \ln \sqrt{-1} = \ln x$, i.e. $\ln \sqrt{-1} = 0$. Mais Bernoulli en personne établit que $\frac{\ln \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$, une égalité qui est irréfutable, puisque, nota Euler, « cette découverte est basée sur les méthodes les plus fiables de l'analyse ». Euler débouta Leibniz en citant l'exemple suivant: si dans le développement

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

on pose $x = -3$ puis $x = 1$ et qu'on ajoute les résultats obtenues, on trouve que $0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \ldots$, une égalité dont le premier membre est 0 bien que, comme le nota Euler, « le second membre soit différent de 0 ».

Dans l'article cité Euler proposa la solution correcte: les logarithmes des nombres complexes négatifs (ainsi que des autres nombres

complexes) prennent une infinité de valeurs. Son argumentation n'est pas dénuée d'intérêt. La valeur de $y = \ln x$ se définit à partir de l'équation $x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i$, où i est un « nombre infiniment grand » (le terme et la notation sont d'Euler). D'où il s'ensuit que $y = i\,(x^{1/i} - 1)$ et le nombre $x^{1/i}$ — « une racine d'exposant infiniment grand » — prend une infinité de valeurs, généralement complexes.

Il est intéressant de noter qu'en 1761 d'Alembert prit le parti de Bernoulli contre Leibniz et Euler.

3. Fonctions trigonométriques inverses. Ces fonctions s'expriment simplement au moyen des racines et des logarithmes. Voyons par exemple la fonction arc cos. La résolution de l'équation $\cos w = z$, ou $\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) = z$, ou enfin

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

traitée comme un trinôme du second degré en e^{iw}, nous donne

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(nous n'écrivons pas le signe habituel $\pm$, puisque par définition la racine carrée prend deux valeurs). Reste à remarquer que la dernière égalité nous donne

$$w = \arccos z = i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \tag{15}$$

(nous faisons précéder le logarithme de i et non pas de $1/i$, car en vertu de la relation $\frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = z - \sqrt{z^2 - 1}$ le changement du signe du logarithme reviendrait à changer le signe placé devant la racine, or cette dernière prend deux valeurs).

On a des expressions similaires pour les autres fonctions trigonométriques, notamment

$$\begin{gathered} \arcsin z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \\ \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}. \end{gathered} \tag{16}$$

Les formules (15) et (16) rappellent les formules classiques des fonctions hyperboliques inverses, ce qui n'a rien d'étonnant, car en analyse complexe les fonctions trigonométriques sont simplement liées avec les fonctions hyperboliques (cf. n° 14).

Les fonctions trigonométriques inverses sont des fonctions analytiques et dans les formules (15) et (16) il faut comprendre les opérations comme dans le cas des déterminations. Ces opérations sont correctement définies.

4. Fonction puissance générale $w = z^a$. Cette fonction où a est un nombre complexe arbitraire, est définie par la relation

$$w = z^a = e^{a \ln z} \tag{17}$$

et est analytique. Pour les exposants a réels on distinguera trois cas:

a) a est entier. La fonction (17) est alors univalente: la multivalence du logarithme est compensée par la périodicité de la fonction exponentielle. Elle est holomorphe dans $\mathbf{C}$ pour $a > 0$ (le point $z = 0$ est éliminable) et dans $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ pour $a < 0$ ($z = \infty$ est éliminable).

b) $a = p/q$ est un nombre rationnel (on admet que la fraction est irréductible). La multivalence du logarithme est partiellement compensée ici par la périodicité de la fonction exponentielle, et la fonction (17) associe à tout $z \neq 0, \neq \infty$ q valeurs distinctes. Elle est confondue avec la fonction analytique $w = \sqrt[q]{z^p}$.

c) a est irrationnel. Aux valeurs de $a \ln z$ distinctes l'une de l'autre d'un multiple entier de $2a\pi i$ correspondent des valeurs distinctes de $e^{a \ln z}$. Les compensations signalées dans les cas précédents n'ont plus lieu et la fonction (17) associe à tout $z \neq 0, \neq \infty$ un ensemble dénombrable de valeurs.

Supposons maintenant que $a = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Un calcul simple

$$z^a = e^{(\alpha+i\beta)\,[\ln r + i(\varphi+2k\pi)]} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi+2k\pi)} e^{i[\beta \ln r + \alpha(\varphi+2k\pi)]}$$

(où $z = re^{i\varphi}$ et k est un entier quelconque) montre qu'à chaque nombre complexe $z \neq 0, \neq \infty$ la fonction (17) associe un ensemble dénombrable de valeurs dont les modules $r^\alpha e^{-\beta\varphi} e^{-2k\pi\beta} = \rho_0 e^{-2k\pi\beta}$ forment une progression géométrique infinie dans les deux sens de raison $q = e^{-2\pi\beta}$ et les arguments $\beta \ln r + \alpha\varphi + 2k\pi\alpha = \psi_0 + 2k\pi\alpha$ une progression arithmétique infinie dans les deux sens de raison $d = 2\pi\alpha$ si $\alpha \neq 0$. Pour $\alpha = 0$ les arguments sont égaux.

Par exemple *)

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left(i\frac{2\pi}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{18}$$

5. Fonction exponentielle générale $w = a^z$. Cette fonction dans laquelle $a \neq 0, \neq \infty$ est un nombre complexe est définie par la relation

$$w = a^z = e^{z \ln a}. \tag{19}$$

Ce terme qui est parfois utilisé est illégitime. En effet, (19) n'est pas une fonction au sens habituel de ce terme, car $\ln a = \ln |a| + i \operatorname{Arg} a + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$)

*) Cet exemple a de quoi rendre perplexe tout lecteur peu initié: on élève un nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$ à une puissance imaginaire $\sqrt{-1}$ et on obtient une infinité de valeurs et de surcroît réelles!

prend une infinité de valeurs et par suite a^z (pour z non entier) est multivalente. Ce n'est pas non plus une fonction analytique, car certains de ses éléments obtenus en attribuant au logarithme l'une quelconque de ses valeurs ne sont pas consécutifs.

Donc a^z doit être traitée comme un ensemble de fonctions (entières) distinctes

$$e^{z \ln |a| + i \operatorname{Arg} a} e^{2k\pi i z} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

✱ Montrer que la fonction $f(x) = x^x$, $x > 0$, peut être prolongée holomorphiquement au plan $\mathbf{C}$ privé de l'axe $]-\infty, 0[$. Calculer $f(i)$ et $f(-i)$. ✱

31. Points singuliers. Au n° 25 nous avons étudié les points singuliers isolés des fonctions holomorphes (ces points sont encore appelés *points singuliers à caractère univoque*). Mais par exemple le point $z = 0$ qui est singulier pour la fonction analytique $w = \sqrt{z}$ n'entre pas dans la classification du n° 25. On se propose donc de généraliser cette classification en introduisant la notion de point singulier d'une fonction analytique. Comme au n° 25 on se bornera au cas simple des points singuliers isolés.

Definition 1. On dit qu'un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$ est un *point singulier isolé* d'une fonction analytique s'il existe un voisinage pointé V' du point a tel qu'un élément $F = (U, f)$ de cette fonction puisse être prolongé analytiquement le long de tout chemin $\gamma \subset V'$.

C'est le cas par exemple des points $z = 0$ et $z = \infty$ pour les fonctions analytiques $\sqrt[n]{z}$ et $\ln z$ (pour voisinage V' de ces deux points on peut prendre la couronne $\{0 < |z| < \infty\}$). Les points singuliers de la fonction $\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$ sont les points $z = 0$ et $q = \infty$ qui sont déjà des points singuliers de $\sqrt{z}$ et le point $z = 1$ en lequel l'une des déterminations de la fonction (celle pour laquelle $\sqrt{z}$ est égale à -1 pour $z = 1$) présente un pôle (la détermination pour laquelle $\sqrt{z} = 1$ pour $z = 1$ est régulière en $z = 1$).

Les points singuliers isolés des fonctions analytiques seront classés en fonction du comportement de leurs éléments par un prolongement le long d'un chemin fermé $\gamma \subset V'$.

Lemme. *Soient a un point singulier isolé d'une fonction analytique $\mathcal{F}$, et V' un voisinage pointé tel que celui de la définition 1. Si un élément $F_0 \in \mathcal{F}$ ne change pas *) lorsqu'on parcourt un chemin fer-*

*) Ou bien est remplacé par un élément équivalent à l'élément initial (au cas où les éléments envisagés ne seraient pas canoniques).

mé $\gamma_0 \subset V'$, *tout élément* F *provenant de* F_0 *par prolongement à* V' *ne change pas par prolongement le long de tout chemin* γ *homotope à* γ_0 *dans* V'.

▶ Soient λ un chemin de V' conduisant de F_0 à F et $\tilde{\gamma} = \lambda^- \cup \cup \gamma_0 \cup \lambda$ (le parcours a lieu dans l'ordre λ^-, γ_0, λ; cf. n° 15).

Par une déformation continue à l'intérieur de V', déformation qui consiste à rogner l'extrémité de λ et l'origine de λ^- (les bouts rognés sont noircis sur la figure 60), on peut transformer $\tilde{\gamma}$ en γ_0, i.e. $\tilde{\gamma} \sim \gamma_0$ (les chemins fermés $\tilde{\gamma}$ et γ_0 sont homotopes dans V'). Par hypothèse, $\gamma \sim \gamma_0$, donc $\gamma \sim \tilde{\gamma}$. Supposons que $\tilde{\gamma}$ et γ ont des extrémités communes (qui sont confondues, car ces chemins sont tous deux fermés) et que l'élément F est prolongeable le long de tout chemin dans V'. Le théorème général de la monodromie (théorème 3 du n° 28) nous dit alors que les prolongements de F le long de γ et de $\tilde{\gamma}$ sont confondus. ◀.

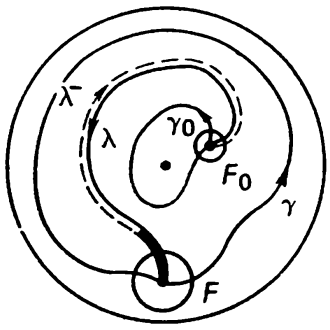

Fig. 60

De ce lemme il s'ensuit que le prolongement le long de chemins fermés homotopes à 0 dans V' ne modifie pas les éléments (car de tels chemins se transforment en chemins contenus dans le disque d'un élément quelconque, or le prolongement le long des derniers chemins ne modifie visiblement pas les éléments). Donc ne présentent de l'intérêt pour nous que les prolongements le long de chemins non homotopes à 0 dans V'.

Définition 2. Soient a un point singulier isolé d'une fonction analytique, V' un voisinage pointé de a tel que celui de la définition 1, et $\gamma_0 \subset V'$ un chemin de Jordan fermé entourant le point a. On distinguera deux cas:

(I) a s'appelle *point singulier à caractère univoque* si le parcours de γ_0 ne modifie pas l'élément initial de la fonction;

(II) a s'appelle *point singulier à caractère multivoque* ou *point de branchement* si le parcours de γ_0 conduit à un élément distinct de l'élément initial.

Dans le cas (I) le prolongement de l'élément initial le long de tout chemin $\lambda \subset V'$ conduisant à un point fixé $z \in V'$ nous donne le même élément. En effet, s'il existait deux chemins λ_1 et λ_2 conduisant à des éléments différents, le chemin fermé $\gamma = \lambda_1^- \cup \lambda_2 \subset V'$ modifierait l'élément initial. Or le chemin γ est ou bien homotope à 0 et alors il ne peut modifier l'élément initial d'après la remarque ci-dessus, ou bien est homotope au chemin γ_0 parcouru plusieurs

fois (dans le sens positif ou négatif) et d'après le lemme il ne modifie pas non plus l'élément initial. Cette contradiction prouve notre assertion.

De cette assertion il s'ensuit que dans la cas (I) le prolongement de l'élément initial le long de chemins dans V' nous donne une fonction f univalente, i.e. holomorphe dans V', qui est une détermination de la fonction analytique envisagée *). Le point a est un point singulier isolé de la fonction f au sens du n° 25. Ce point peut être éliminable, un pôle ou essentiel selon le comportement de f à son voisinage. (Si du reste l'élément initial est canonique, le point singulier ne peut être éliminable, car dans ce cas le disque de convergence de l'élément contiendrait le point a.)

Dans le cas (II) la fonction analytique obtenue par prolongement de l'élément initial le long de chemins dans V' ne possède pas de déterminations dans V' **). On divisera le cas (II) en deux sous-classes.

(IIa) Il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que le n-uple parcours de γ_0 dans un sens nous conduise à l'élément initial. Dans ce cas a est un point de branchement d'*ordre fini*, et le plus petit des nombres n jouissant de cette propriété s'appelle *ordre de branchement*.

Il est aisé de voir que l'ordre de branchement ne change pas si l'on remplace γ_0 par tout chemin γ homotope à γ_0 dans V'. En effet, désignons par $k\gamma$ le chemin obtenu par un k-uple parcours de γ dans un sens (le même que celui de γ si $k > 0$ et contraire si $k < 0$); si $\gamma \sim \gamma_0$, alors $k\gamma \sim k\gamma_0$ et d'après le lemme prouvé plus haut les contours $k\gamma$ et $k\gamma_0$ tous deux changent ou ne changent pas l'élément initial. On laisse au lecteur le soin de prouver que si un chemin fermé $\gamma \subset V'$ ne change pas l'élément initial, il est homotope à un multiple entier (positif, négatif ou nul) du chemin $n\gamma_0$, où n est l'ordre de branchement du point a.

(IIb) L'entier n du cas (IIa) n'existe pas, i.e. les parcours de γ_0 dans un sens conduisent à de nouveaux éléments. Dans ce cas le point a s'appelle *point de branchement d'ordre infini* ou *point de branchement logarithmique*.

---

*) Le prolongement de l'élément initial le long de chemins en dehors de V' risque de donner un autre élément de même centre, de sorte que la fonction analytique envisagée peut être multivalente. Ainsi, le prolongement d'un élément arbitraire de la fonction analytique $1/(1+z)$ le long de chemins de $V' = \{0 < |z-1| < 1\}$ nous conduit à une fonction univalente (l'une des deux déterminations de $1/(1+\sqrt{z})$), mais le prolongement le long d'un chemin fermé entourant $z = 0$ associe à un élément d'une détermination un élément de l'autre détermination.

**) Bien que dans V' il puisse exister une détermination de la fonction envisagée qui provient de l'élément initial par prolongement le long de chemins extérieurs à V' (cf. plus bas exemple 5).

Exemples

1. La fonction $\sqrt[n]{z}$ présente en $z = 0$ et $z = \infty$ des points de branchement d'ordre n, la fonction $\ln z$, des points de branchement logarithmiques.

2. La fonction $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ présente en $z = 0$ un point singulier éliminable et en $z = \infty$ un point singulier essentiel. C'est une fonction entière (ceci ressort du developpement

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} z^2 - \ldots$$

qui est valable dans la couronne $V' = \{0 < | z | < \infty\}$).

3. La fonction $\sqrt{e^{z^2} + 1}$ présente en tous les zéros de l'équation $e^{z^2} + 1 = 0$, i.e. en $z_k = \sqrt{\ln(-1)} = \pm \sqrt{\pi i + 2k\pi i}$, des points de branchement d'ordre deux ; le point $z = \infty$ est un point singulier non isolé.

4. La fonction $1/\ln z$ possède des points de branchement logarithmiques en $z = 0$ et $z = \infty$; pour $z = 1$ l'une de ses déterminations (la principale) possède dans la couronne $\{0 < | z - 1 | < \infty\}$ un pôle du premier ordre, les autres déterminations sont holomorphes en ce point.

5. Etudions en détail le cas de la fonction analytique

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{z}}.$$

Le point $z = 0$ est un point de branchement d'ordre deux du radical intérieur $\sqrt{z}$. Dans le disque $U = \{| z - 1/2 | < 1/2\}$ intérieur au voisinage $U' = \{0 < | z | < 1\}$ on peut mettre en évidence quatre déterminations f_ν de la fonction w compte tenu des signes des deux radicaux. Soit f_1 l'une de ces déterminations ; l'élément $F_{h1} = (U, f_1)$ se prolonge le long du cercle $\gamma_0 : z = \frac{1}{2} e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, en l'élément $F_2 = (U, f_2)$, où f_2 est une autre détermination, car le radical intérieur change de signe avec un tel parcours. Le parcours itéré de γ_0 nous conduit encore à l'élément F_1, car les parcours de γ_0 ne changent pas les déterminations du radical extérieur dont $z = 1$ est un point de branchement. La situation est la même pour les deux autres déterminations : $f_3 = -f_1$ et $f_4 = -f_2$. La fonction w présente donc en $z = 0$ deux points de branchement distincts d'ordre deux.

Etudions maintenant le point $z = 1$ en lequel le radicande de w s'annule pour l'une des valeurs de $\sqrt{z}$. Soient $V' = \{0 < | z - 1 | < 1\}$, $V = \{| z - 1/2 | < 1/2\}$ et g_ν les quatre déterminations de w dans V. Soient g_1 et g_2 ($g_2 = -g_1$) les déterminations pour lesquelles le radical intérieur est égal à -1 pour $z = 1$. Le parcours du cercle

$\gamma_1 : z = 1 + \frac{1}{2} e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, ne change pas les déterminations du radical intérieur, mais par contre il modifie le signe du radical extérieur (lorsque z parcourt le cercle γ_1, le point $\zeta = 1 + \sqrt{z}$, en lequel est étudiée la détermination du radical intérieur choisie, décrit dans le plan ζ un chemin de Jordan ferme-entourant le point $\zeta = 0$), donc l'élément (V, g_1) se prolonge en l'élément (V, g_2). Le deuxième parcours de γ_1 change encore le signe du radical extérieur et nous conduit de nouveau à l'élément (V, g_1). Les deux autres déterminations g_3 et g_4 ($g_4 = -g_3$) pour lesquelles le radical intérieur est égal à 1 pour $z = 1$ ne changent pas par le parcours de γ_1 (le point $\zeta = 1 + \sqrt{z}$ de la détermination choisie décrit un chemin de Jordan fermé entourant le point $\zeta = 2$ mais pas le point $\zeta = 0$), donc ce parcours transforme chaque élément (V, g_3) et (V, g_4) en lui-même Donc en $z = 1$ la fonction w possède un point de branchement d'ordre deux et deux éléments réguliers *).

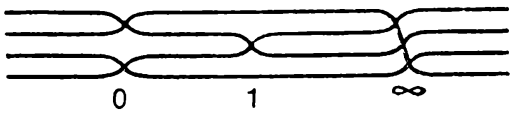

Fig. 61

Pour étudier la fonction w en $z = \infty$ il faut considérer le voisinage pointé $W' = \{1 < |z| < \infty\}$ et dans W', par exemple, le disque $W = \{|z - 2| < 1\}$. Soit (W, h_1) l'un quelconque des quatre éléments de la fonction w dans le disque W. Le parcours du cercle $\gamma_3 : z = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ modifie le signe du radical intérieur, donc il conduit à un autre élément, (W, h_2). Le deuxième parcours de γ_3 nous donne le troisième élément, (W, h_3), le troisième parcours, le quatrième élément, (W, h_4) et seul le quatrième parcours nous conduit à l'élément initial (W, h_1). Ceci est clair si l'on remarque que pour les grands $|z|$ l'unité du radicande est négligeable et $w \approx \approx \sqrt[4]{z}$. Donc la fonction w présente en $z = \infty$ un point de branchement d'ordre quatre.

Les autres points de $\overline{\mathbf{C}}$ sont réguliers pour cette fonction analytique.

Les résultats de notre analyse sont schématiquement représentés sur la figure 61.

Appesantissons-nous sur les points de branchement d'ordre fini. Montrons qu'au voisinage d'un tel point $a \in \mathbf{C}$ une fonction analytique peut être développée en une série de puissances fractionnaires de $z - a$ qui est une série de Laurent généralisée appelée *série de Puiseux* **).

*) Les éléments (U, g_3) et (U, g_4) ne sont pas canoniques, car leur disque de convergence est plus grand que U.

**) Victor Puiseux (1820-1883), mathématicien français. Publia en 1850 ses travaux sur les séries.

Théorème. *Toute fonction analytique *) peut être représentée dans un voisinage pointé $V' = \{0 < |z - a| < R\}$ d'un point de branchement d'ordre n fini par une série de la forme*

$$w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}. \tag{1}$$

▶ Posons $z - a = \zeta^n$. Le point ζ décrit alors dans le plan ζ un cercle assez petit $\lambda : \zeta = \rho e^{i\tau}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$, le point correspondant $z = a + \zeta^n$ décrit n fois le cercle $\gamma_0 : z = a + \rho^n e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Puisque l'élément initial de la fonction analytique w envisagée ne change pas par ce parcours, l'élément correspondant de la même fonction w, traitée comme une fonction de la variable ζ, ne change pas par un simple parcours de λ.

On en déduit que $\zeta = 0$ est un point singulier à caractère univoque de la fonction w, qui par conséquent se représente dans un voisinage pointé de $\zeta = 0$ par la série de Laurent

$$w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k. \tag{2}$$

En substituant $\zeta = \sqrt[n]{z-a} = (z-a)^{1/n}$ dans (2), on obtient le développement (1). ◀

Ce théorème est valable aussi pour $a = \infty$ pourvu que $V' = \{R < |z| < \infty\}$ et $a = 0$ dans la formule (1).

Exemple. Le développement binomial nous permet d'écrire sans peine la série de Puiseux de la fonction analytique étudiée dans l'exemple 5. Dans la couronne $V' = \{0 < |z| < 1\}$ on a

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \pm\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{z} - \frac{1}{8}z + \frac{1}{16}z\sqrt{z} - \dots\right),$$

dans la couronne $W' = \{1 < |z| < \infty\}$

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \sqrt[4]{z}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{1/2} = \sqrt[4]{z}\left(1 \frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{8z} + \frac{1}{16z\sqrt{z}} - \dots\right),$$

et dans la couronne $V' = \{0 < |z - 1| < 1\}$

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \sqrt{1 \pm \{1 + (z-1)\}^{1/2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{z-1}}{i\sqrt{2}}\left\{1 + \dfrac{1}{8}(z-1) + \dots\right\}, \\ \pm\sqrt{2}\left\{1 + \dfrac{1}{8}(z-1) + \dots\right\}. \end{cases}$$

---

*) Plus exactement, l'ensemble des éléments de cette fonction provenant de l'un d'eux par un prolongement le long de tous les chemins possibles $\gamma \subset V'$.

Lorsque $z \to a$, les déterminations d'une fonction analytique ont un comportement qui dépend de la « partie principale » du développement de Puiseux. Pour $a \in \mathbf{C}$, si le développement (1) ne comporte pas de puissances négatives, ces déterminations sont connues en a (comme $\sqrt{z}$ ou $e^{\sqrt{z}}$ au point $z = 0$); si ces puissances sont en nombre fini, les déterminations tendent vers l'infini (comme $1/\sqrt{z}$ lorsque $z \to 0$); si ces puissances sont en nombre infini, les déterminations ne tendent vers aucune limite lorsque $z \to a$ (comme $e^{1/\sqrt{z}}$ ou $\sin \frac{1}{\sqrt{z}}$ lorsque $z \to 0$). Pour $a = \infty$ le comportement des déterminations dépend de la présence des puissances positives.

Les points de branchement d'ordre fini au voisinage desquels les déterminations d'une fonction analytique tendent vers une limite finie ou infinie s'appellent *points singuliers algébriques* de cette fonction. A ces points il est commode de rapporter les pôles des déterminations de la fonction envisagée. Les autres points singuliers isolés des fonctions analytiques (i.e. les points de branchement d'ordre infini, les points de branchement d'ordre fini au voisinage desquels le comportement des déterminations est indéterminé et les points singuliers essentiels) sont dits *transcendants*. (Exemple: pour la fonction $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$, les points $z = 0$ et $z = \infty$ sont des points singuliers algébriques, le point $z = 1$, un point singulier transcendant pour la détermination telle que $\sqrt{1} = -1$).

✱ 1. La fonction $\sqrt{f(z)}$ possède-t-elle un point de branchement en chaque zéro de la fonction holomorphe f?

2. Trouver tous les points singuliers de la fonction analytique $e^{\sqrt{z \sin z}}$ et indiquer ceux qui sont algébriques. ✱

§ 10. Notion de surface de Riemann

Une fonction analytique peut associer aux points d'un domaine du plan plusieurs (voire même un ensemble dénombrable) de valeurs. Dans ce paragraphe nous considérons à la place des domaines plans des surfaces à plusieurs feuillets que l'on pourrait s'imaginer situées au-dessus de chaque point z du plan avec un nombre de feuillets égal à la valeur prise par la fonction en ce point. C'est pourquoi les fonctions analytiques peuvent être traitées sur ces surfaces comme des fonctions ordinaires (i.e. univalentes).

32. Approche élémentaire. Commençons par un exemple élémentaire. Considérons dans un domaine D figuré par le plan $\mathbf{C}$ muni d'une coupure le long du demi-axe négatif les deux déterminations f_1 et f_2 de la fonction analytique

$$w = \sqrt{z}. \tag{1}$$

Supposons que f_1 est caractérisée par la condition $f_1(1) = 1$ et f_2 par la condition $f_2(1) = -1$. Il est évident que $f_2(z) = -f_1(z)$ pour tout $z \in D$. Ces déterminations sont univalentes et sont associées à une application conforme du domaine D respectivement sur les demi-plans de droite et de gauche du plan w qui seront désignés par D_1^* et D_2^*.

Prenons deux exemplaires du domaine D et disposons-les l'un au-dessus de l'autre comme sur la figure 62, *a*. La figure 62 indique aussi la correspondance entre les lèvres des coupures dans D et les portions d'axe imaginaire du plan w: les portions correspondantes sont représentées par les mêmes dessins.

Collons la lèvre supérieure de la coupure du premier exemplaire de D avec la lèvre inférieure de la coupure du second exemplaire et

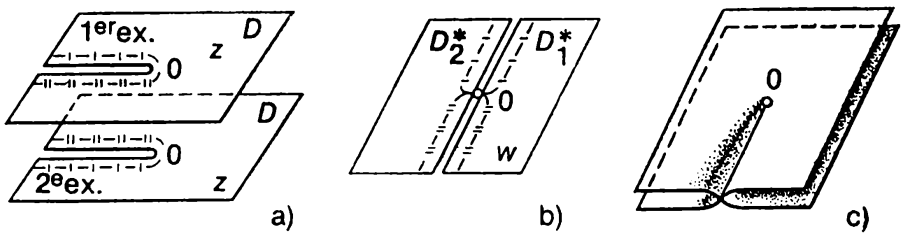

Fig. 62

par voie de conséquence D_1^* avec D_2^* le long du demi-axe supérieur (ces portions sont signalées par le dessin —|—|—|—). Collons ensuite les autres lèvres libres des coupures de D qui sont représentées par le dessin —||—||— (dans un espace à trois dimensions le second collage fait apparaître des self-intersections, mais on conviendra de ne pas identifier les points de l'axe le long duquel a lieu la self-intersection de la surface, points qui sont représentés par des dessins différents).

La surface à deux feuillets obtenue (cf. fig. 62, *c*) s'appelle *surface de Riemann de la fonction analytique* $\sqrt{z}$. Cette racine peut être traitée comme une fonction ordinaire, car les deux valeurs que cette racine associe à tout point $z_0 \neq 0, \neq \infty$, seront rapportées à deux points distincts situés chacun sur un feuillet de la surface au-dessus de z_0. Les points du demi-axe négatif $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0[$ ne font pas exception, car au-dessus de chacun d'eux sont situés aussi deux points de la surface (on a en effet convenu de ne pas identifier les points de la ligne de self-intersection de la surface appartenant à des feuillets différents). Aux points $z = 0$ et $z = \infty$ uniquement est associée une seule valeur, donc on admettra qu'au-dessus d'eux est situé un seul point de la surface. Les feuillets de la surface se joignent en ces points qui sont appelés *points de branchement* de la surface.

La surface de Riemann de la fonction analytique

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{2}$$

présente une structure analogue. Elle a n feuillets. Au-dessus de chaque point $z \neq 0$, $\neq \infty$ sont situés n points distincts de la surface (appelés points *ordinaires* de cette surface) et au-dessus de chacun des points $z = 0$ et $z = \infty$, on a un seul point de branchement. La figure 63, a et b, représente respectivement les portions de surface situées au-dessus du voisinage d'un point régulier et du point singulier de la fonction $\sqrt[3]{z}$. Les points du demi-axe négatif ne font pas exception ; la portion de surface située au-dessus du voisinage d'un tel point est

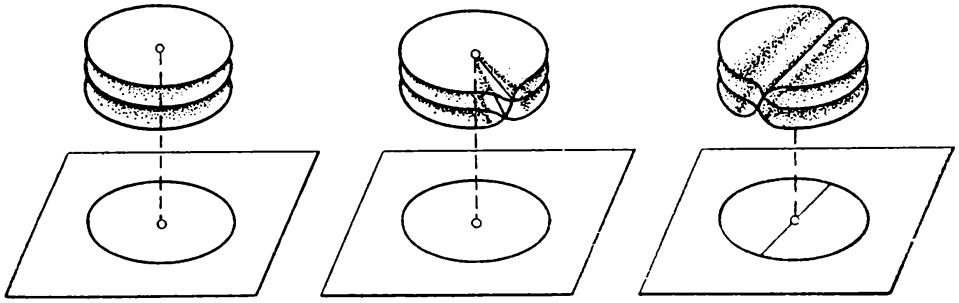

Fig. 63

représentée sur la figure 63, c. Puisque nous ne tenons pas compte de la self-intersection de la surface, ce dessin ne se distingue pas topologiquement de celui de la figure 63, a : la portion considérée est constituée de trois disques indépendants l'un de l'autre.

La surface de Riemann du logarithme

$$w = \ln z \tag{3}$$

est à une infinité de feuillets. Elle est représentée sur la figure 64. Prenons encore pour domaine D le plan $\mathbf{C}$ privé du demi-axe négatif et considérons dans D la détermination principale du logarithme

$$w = f_0(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad (-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi).$$

Cette fonction est univalente et réalise une application conforme du domaine D sur la bande

$$D_0^* = \{-\pi < \operatorname{Im} w < \pi\};$$

la corresondance entre les lèvres de la coupure et les frontières est représentée sur la figure 64.

Le logarithme possède dans le domaine D une infinité de déterminations

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

qui appliquent D sur des bandes D_k^* qui se déduisent de D_0^* par des translations successives de vecteur $2\pi i$. En conséquence, on prend

un ensemble dénombrable d'exemplaires du domaine D et on colle les lèvres supérieure et inférieure de la coupure de l'exemplaire zéro respectivement à la lèvre inférieure de celle de l'exemplaire 1 et à la lèvre supérieure de celle de l'exemplaire — 1 (fig. 64). On colle ensuite les autres lèvres libres respectivement à la lèvre inférieure de la coupure de l'exemplaire 2 et à la lèvre supérieure de celle de l'exemplaire — 2 et ainsi de suite.

Au-dessus de chaque point $z \neq 0, \neq \infty$ est située une portion de surface composée d'un ensemble dénombrable de disques distincts; à chaque disque est associée une détermination du logarithme de

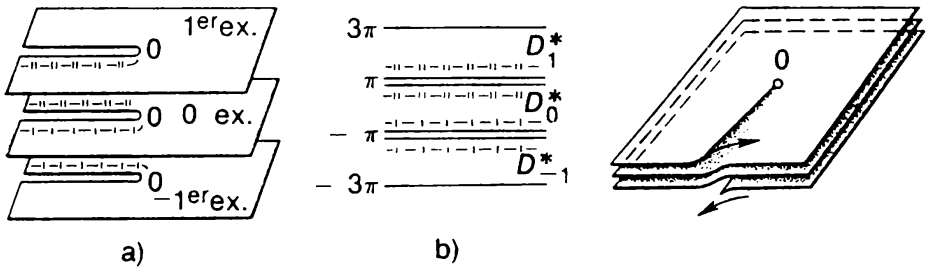

Fig. 64

numéro approprié agissant dans ce voisinage (les points du demi-axe négatif ne font pas exception). Donc le logarithme peut être traité sur la surface de Riemann construite comme une fonction ordinaire. Le logarithme n'est pas défini en $z = 0$ et $z = \infty$, donc on conviendra que sa surface de Riemann ne possède pas de points au-dessus de $z = 0$ et $z = \infty$.

Considérons maintenant l'exemple plus compliqué de la surface de Riemann de l'arc sinus

$$w = \text{arc sin } z. \tag{4}$$

Au n° 14 on a vu que la fonction $z = \sin w$ est univalente et réalise une application conforme de la demi-bande $\{-\pi/2 < \text{Re } w < \pi/2, \text{Im } w > 0\}$ sur le demi-plan supérieur z; il est évident que la bande $\{-\pi/2 < \text{Re } w < \pi/2\}$ s'applique sur le plan z privé des axes $]-\infty, 1]$ et $[1, \infty[$.

Désignons ce domaine par G et soit $w = g_0(z)$ la détermination de arc sin z qui applique G sur la bande $G_0^* = \{-\pi/2 < Re\, w < \pi/2\}$ (cette détermination peut encore être caractérisée par la condition $g_0(0) = 0$). Puisque la fonction arc sin z possède une infinité dénombrable de déterminations, nous devons envisager une infinité dénombrable de domaines G pour construire sa surface de Riemann. Au k-ième exemplaire ($k = 0, \pm 1, \ldots$) nous associons les valeurs de la k-ième détermination $w = g_k(z)$ qui applique G sur la bande $G_k^* = \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi < \text{Re } w < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ (cette détermination peut être définie aussi par la condition $g_k(0) = k\pi$).

Reste à coller les divers exemplaires du domaine en fonction du collage de leurs images G_k^*. La figure 65 explique cette opération.

On obtient en définitive une surface de Riemann à une infinité de feuillets, qui présente au-dessus de $z = \pm 1$ une infinité dénombrable de points de branchement. En $z = \infty$ elle possède deux

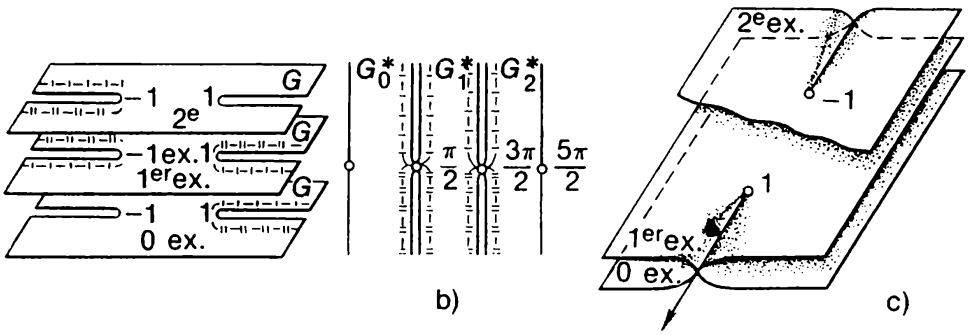

Fig. 65

points de branchement logarithmiques. On arriverait aux mêmes conclusions en étudiant la fonction arc sin z au moyen du logarithme

$$\arcsin z = -i \ln \left(\sqrt{1 - z^2} + iz \right).$$

33. Approche générale. On introduit ici une notion générale de la surface de Riemann, plus exactement, on la traite comme un espace topologique séparé abstrait *).

Considérons un ensemble $\mathfrak{R}$ dont les points sont les couples

$$A = \{a,\ f_a(z)\}, \tag{1}$$

où $a \in \bar{\mathbf{C}}$ et la fonction

$$f_a(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, & \text{si} \quad a \in \mathbf{C}, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{z^n}, & \text{si} \quad a = \infty \end{cases} \tag{2}$$

est holomorphe dans un disque U_a de centre a; pour fixer les idées on admettra que U_a est le disque de convergence de la série correspondante (2). Munissons $\mathfrak{R}$ d'une topologie de la manière suivante: par *ε-voisinage* $\tilde{U}(A)$ d'un point $A \in \mathfrak{R}$ on comprendra l'ensemble des points $B = \{b,\ f_b(z)\}$ tels que: 1) b soit contenu dans un ε-

*) Un espace topologique X est *séparé* (ou *de Hausdorff*) s'il vérifie l'axiome suivant de séparation (axiome de Hausdorff): pour tout couple a, b de points de X il existe un voisinage de a et un voisinage de b sants points communs.

voisinage du point a (i.e. $\{ | z - a | < \varepsilon\}$ si $a \in \mathbf{C}$ et $\{| z | > 1/\varepsilon\}$ si $a = \infty$); 2) l'élément (U_0, f_0) est consécutif à l'élément (U_a, f_a).

On peut s'imaginer un point A comme un point de la surface de Riemann (au sens élémentaire décrit au n° 32) situé au-dessus d'un point $a \in \overline{\mathbf{C}}$. La donnée de la fonction $f_a(z)$ équivaut à indiquer le feuillet auquel appartient le point A. Le voisinage $\widetilde{U}(A)$ est composé de points B du même feuillet se projetant sur un voisinage de a (fig. 66); les points des autres feuillets qui se projettent sur ce voisinage de a (tel le point B' de la figure 66) ne sont pas considérés appartenir à $\widetilde{U}(A)$.

Il est immédiat de voir que la topologie décrite munit $\mathfrak{R}$ d'une structure d'espace séparé. Assurons-nous que les axiomes de sépara-

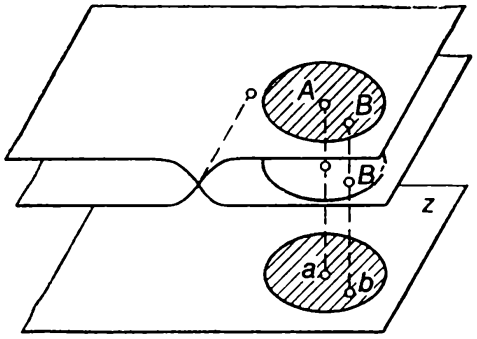

Fig. 66

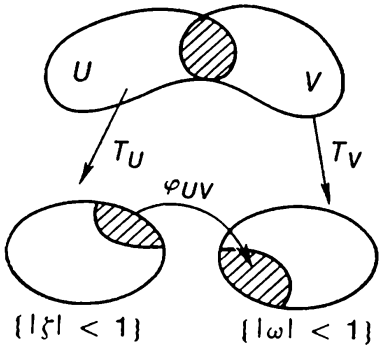

Fig. 67

tion sont bien vérifiés: si $A \neq B$, on a soit $a \neq b$, soit $a = b$, mais $f_a \neq f_b$. Pour construire des voisinages disjoints $\widetilde{U}(A)$ et $\widetilde{U}(B)$, il suffit dans le premier cas de choisir des voisinages disjoints des points $a, b \in \overline{\mathbf{C}}$ et dans le second, de prendre ε assez petit pour que le ε-voisinage soit contenu dans les disques de convergence des séries de f_a et f_b et d'inclure dans $\widetilde{U}(A)$ tous les points (c, f_c), où (U_c, f_c) est un élément consécutif à (U_a, f_a), et dans $\widetilde{U}(B)$, tous les points (c, f_c), où (U_c, f_c) est un élément consécutif à (U_b, f_b) (les voisinages $\widetilde{U}(A)$ et $\widetilde{U}(B)$ sont disjoints, sinon l'élément (U_b, f_b) serait confondu avec (U_a, f_a)).

On peut définir la projection de l'espace $\mathfrak{R}$ sur $\overline{\mathbf{C}}$ comme l'application

$$\pi : \{a, f_a(z)\} \to a. \tag{3}$$

Globalement cette application n'est pas bijective, car il existe sur $\mathfrak{R}$ une infinité de points se projetant en un même point. Mais localement elle l'est. En effet, si un point b appartient au disque de convergence de la série f_a, l'élément (U_b, f_b) consécutif à (U_a, f_a)

est complètement défini et par suite dans un voisinage assez petit $\widetilde{U}(A)$ il n'existe qu'un seul point se projetant en b. Il est évident aussi que l'application (3) et sa réciproque sont continues, donc la projection est un homéomorphisme local.

La projection transforme $\widetilde{U}(A)$ en un disque du plan $\overline{\mathbf{C}}$; en réalisant une transformation homographique de ce disque sur le disque unité $\{|\zeta| < 1\}$ on peut considérer que sur $\widetilde{U}(A)$ est défini l'homéomorphisme

$$T_U : \widetilde{U}(A) \to \{|\zeta| < 1\}. \tag{4}$$

Chaque point $B \in \widetilde{U}(A)$ est défini univoquement par sa projection b, donc par le point $\zeta = T_U(B)$ du disque unité. Par conséquent on peut traiter ζ comme un paramètre local sur le voisinage $\widetilde{U}(A)$.

Si deux voisinages $U, V \subset \mathfrak{R}$ se rencontrent, il apparaît une application de l'une sur l'autre des parties des disques paramétriques correspondant à cette intersection:

$$\omega = \varphi_{UV}(\zeta) = F_V \circ T_U^{-1}(\zeta); \tag{5}$$

cette application s'appelle *relation de voisinage* (fig. 67). Etant la composée de transformations homographiques, la relation de voisinage est aussi homographique, i.e. conforme.

Définition 1. On dit qu'un espace séparé est une *variété complexe* (de dimension un) s'il peut être recouvert par un système de voisinages homéomorphes à des disques de telle sorte que toutes les relations de voisinage engendrées par ces homéomorphismes soient des applications conformes.

On a ainsi prouvé le

Théorème 1. *L'espace $\mathfrak{R}$ est une variété complexe de dimension un.*

On étudiera les variétés complexes de dimension supérieure dans le tome 2.

Il est évident que l'espace $\mathfrak{R}$ n'est pas connexe. Mais tout sous-ensemble $\mathfrak{R}_0$ de points $\{a, f_a(z)\}$, où f_a sont les déterminations d'une même fonction analytique, est connexe. En effet, si des points $A = \{a, f_a, (z)\}$ et $B = \{b, f_b(z)\}$ appartiennent à $\mathfrak{R}_0$, les éléments (U_a, f_a) et (U_b, f_b) proviennent l'un de l'autre par un prolongement le long d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$. Mais alors les points $A_t = \{a_t, f_{at}(z)\}$ appartiennent aussi à $\mathfrak{R}_0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Ceci définit une application continue de $[\alpha, \beta]$ sur $\mathfrak{R}_0$, i.e. un chemin de $\mathfrak{R}_0$ reliant les points A et B. Donc $\mathfrak{R}_0$ est même connexe par arcs (cf. n° 4). Par ailleurs, il contient avec chaque point A un voisinage $U(A)$, i.e. est un ouvert. Donc $\mathfrak{R}_0$ est un domaine de l'espace $\mathfrak{R}$.

Nous avons prouvé qu'à toute fonction analytique correspond un domaine de l'espace $\mathfrak{R}$. Il est évident que la réciproque est vraie,

i.e. à tout domaine de $\mathfrak{R}$ est associée une fonction analytique *). On a ainsi établi le

Théorème 2. *Les fonctions analytiqes et les domaines de l'espace* $\mathfrak{R}$ *sont en correspondance biunivoque.*

Définition 2. Un domaine $\mathfrak{R}_0$ de l'espace $\mathfrak{R}$, caractérisé par le fait que les fonctions holomorphes f_a appartenant à ses points $A = \{a, f_a(z)\}$ sont les déterminations d'une fonction analytique. s'appelle *surface de Riemann* de cette fonction.

Nous sommes ainsi arrivés à la notion générale de surface de Riemann. Cette notion consiste à traiter chaque fonction analytique comme une fonction ordinaire (i.e. univalente) sur sa surface de Riemann. En effet, par construction la surface de Riemann possède autant de points A se projetant en a qu'il n'existe d'éléments distincts (U_a, f_a) de centre a de la fonction analytique, i.e. autant de valeurs prises par cette fonction au point a.

Donc, *une fonction analytique* $\mathcal{F}$ *est une fonction de point sur sa surface de Riemann*:

$$F: A = \{a, f_a(z)\} \to f_a(a) \tag{6}$$

(et non pas une fonction du point a sur le plan).

Sur la variété complexe qu'est la surface de Riemann on peut introduire la notion de fonction holomorphe et on constate alors qu'une fonction analytique est holomorphe sur sa surface de Riemann (cf. § 5, tome 2).

Les surfaces de Riemann au sens élémentaire, étudiées dans le numéro précédent, peuvent être traitées comme des modèles de surfaces de Riemann générales. La théorie des fonctions étudie d'autres modèles aussi. On peut par exemple partir non pas de fonctions multivalentes mais de fonctions univalentes et construire les surfaces de Riemann de telle sorte que ces fonctions soient des bijections et alors les fonctions réciproques (multivalentes) appliqueront (univoquement) les domaines du plan sur les surfaces construites.

Construisons par exemple une surface sur laquelle la fonction exponentielle $w = e^z$ est une bijection. Nous savons qu'elle donne la même image des points distants d'un multiple entier de $2\pi i$ et d'eux seuls (n° 13). Donc, pour obtenir ce qu'on veut il est naturel d'identifier les points $a + 2k\pi i$, où $k = 0, \pm 1, \ldots$ est un entier arbitraire.

En d'autres termes, soit G l'ensemble des translations du plan C de vecteurs $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$:

$$S: z \to z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{7}$$

*) Dans cette démonstration on se sert du fait que tout domaine de $\mathfrak{R}$ est un ensemble connexe par arcs (prouvez-le!).

Il est évident que G est un groupe (pour la composition des transformations) qui est un sous-groupe du groupe λ des transformations homographiques (cf. n° 8). Désignons par $[a]_G$ la classe d'équivalence d'un point $a \in \mathbf{C}$ modulo G, i.e. l'ensemble de tous les points $S(a)$, où $S \in G$ (autrement dit, l'ensemble de tous les points $a + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$). Désignons par $\mathbf{C}/G$ l'ensemble de ces classes d'équivalence; on peut considérer que les éléments de cet ensemble sont identifiés aux points $a + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

Munissons maintenant l'ensemble $\mathbf{C}/G$ d'une topologie. Par voisinage d'un point $[a]_G$ on comprendra un ensemble de points

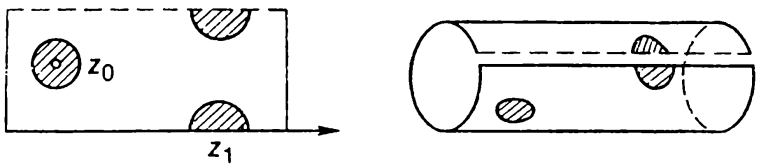

Fig. 68

$[z]_G$ où $z \in \mathbf{C}$ est un point arbitraire d'un voisinage (pour la topologie de $\mathbf{C}$) d'un représentant quelconque a de la classe d'équivalence $[a]_G$. Donc $\mathbf{C}/G$ est muni d'une structure d'espace topologique.

On peut représenter cet espace de la manière suggestive suivante. On choisira les représentants des classes d'équivalence $[z]_G$ de telle sorte qu'ils soient situés dans la bande $\{0 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. Un voisinage assez petit d'un point z_0 tel que $0 < \operatorname{Im} z_0 < 2\pi$ sera alors représenté par un disque de centre z_0, et un voisinage d'un point z_1 tel que $\operatorname{Im} z_1 = 0$, par un ensemble de deux demi-disques (fig. 68). Si l'on colle cette bande de façon à obtenir le cylindre de la figure 68, les voisinages de tous les points seront des voisinages naturels sur le cylindre.

Donc l'espace topologique $\mathbf{C}/G$ est un cylindre dans l'espace. Ce cylindre peut être traité comme la surface de Riemann de la fonction exponentielle (le logarithme applique bijectivement le plan $\mathbf{C}$ privé de l'origine des coordonnées sur cette surface).

Considérons encore un exemple. Au n° 43 on introduira le sinus elliptique $w = \operatorname{sn} z$ qui est une fonction méromorphe possédant deux périodes: une réelle ω_1 et une imaginaire $i\omega_2$; cette fonction est univalente dans le rectangle $\{0 \leqslant \operatorname{Re} z < \omega_1,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z < \omega_2\}$. Pour construire sa surface de Riemann, il suffit donc d'identifier les points $a + k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, où k_1 et k_2 sont des nombres entiers. En d'autres termes, il faut envisager le groupe T des mouvements $z \to z + k_1\omega_1 + ik_2\omega_2$ et l'espace $\mathbf{C}/T$ dont les points sont les classes d'équivalence $[a]_T$ des points $a \in \mathbf{C}$ modulo T. La topologie de cet espace est la même que dans l'exemple précédent: par voisinage d'un point $[a]_T$ on comprend l'ensemble des classes d'équivalence $[z]_T$, où $z \in \mathbf{C}$ est un point arbitraire d'un voisinage (pour la topologie

de $\mathbf{C}$) d'un représentant de la classe $[a]_T$. Cette topologie transforme l'espace $\mathbf{C}/T$ en un tore (fig. 69) qui peut être considéré comme la surface de Riemann du sinus elliptique.

On se propose de clôre ce chapitre en donnant une autre interprétation de l'espace $\mathfrak{R}$. Remarquons préalablement que dans la définition des points de $\mathfrak{R}$ comme des couples $\{a, f_a(z)\}$, où f_a est une fonction holomorphe dans un voisinage de $a \in \overline{\mathbf{C}}$, le choix du voisinage n'est pas essentiel. On peut donc admettre que les points de $\mathfrak{R}$ sont les germes $\mathbf{f}_a$ de fonctions analytiques. Nous avons désigné

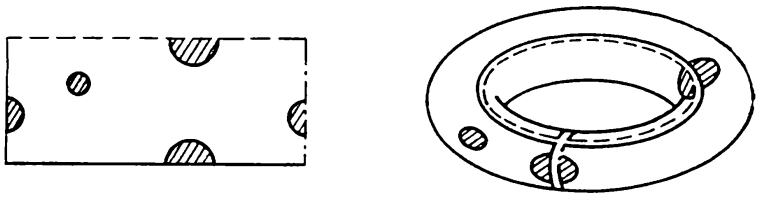

Fig. 69

l'ensemble de tous les germes en un point donné a par $\mathcal{O}_a$. L'ensemble $\mathfrak{R}$ peut donc être traité comme la réunion disjonctive des ensembles $\mathcal{O}_a$ sur tous les $a \in \overline{\mathbf{C}}$:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{a \in \overline{\mathbf{C}}} \mathcal{O}_a.$$

On munit ensuite l'ensemble $\mathfrak{R}$ d'une topologie à l'aide de voisinages que l'on pourrait décrire de la manière suivante en termes de germes: le voisinage $\tilde{U}$ d'un germe $\mathbf{f}_a$ est composé de tous les germes $\mathbf{f}_b$, où b appartient à un voisinage U_a et il existe une fonction f holomorphe dans U_a telle que l'élément (U_a, f) est un représentant des deux germes $\mathbf{f}_a$ et $\mathbf{f}_b$. Nous avons vu que cette topologie transforme $\mathfrak{R}$ en espace séparé. L'application

$$\pi : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbf{C}}$$

qui à tout germe $\mathbf{f}_a$ associe un point a est un homéomorphisme local pour cette topologie.

Le couple $(\mathfrak{R}, \pi)$ s'appelle *faisceau de germes de fonctions analytiques*. Cette notion reflète une approche locale. Il existe aussi une approche globale. En effet, considérons un domaine $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ et une fonction f holomorphe dans D. Cette fonction $f : D \to \mathfrak{R}$ associe à tout point $z \in D$ le germe $\mathbf{f}_z$ engendré par elle en z. La fonction f est visiblement continue pour la topologie de $\mathfrak{R}$ et la composition $\pi \circ f$ est une application identique dans D.

L'application f s'appelle *section du faisceau* $\mathfrak{R}$ au-dessus du domaine D. L'ensemble de toutes les sections de $\mathfrak{R}$ au-dessus du domaine D est un anneau sur lequel les opérations algébriques sont compatibles avec les opérations sur les germes en tout point $z \in D$.

On se bornera ici à cette description. La définition générale de la notion de faisceau sera donnée au tome 2 (cf. n° 28).

Exercices

1. Montrer que si une fonction f se représente dans le disque unité par une série de Taylor $\Sigma c_n z^n$ à coefficients positifs de rayon de convergence 1, le point $z = 1$ est un point singulier de f (théorème de Pringsheim).

2. Montrer que la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ est continue dans le disque unité fermé mais n'est pas prolongeable analytiquement en dehors de ce disque.

3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - e^{i\alpha_n}}$, où $\{\alpha_n\}$ est l'ensemble de tous les nombres rationnels de l'intervalle $[0, 2\pi]$ et a_n des nombres complexes tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, converge pour $|z| < 1$ et $|z| > 1$ respectivement vers des fonctions holomorphes f_1 et f_2 qui ne sont pas le prolongement analytique l'une de l'autre.

4. Construire un exemple de fonction f holomorphe dans le disque $U = \{|z| < 1\}$, continue dans $\bar{U}$ et telle qu'elle se prolonge holomorphement en une fonction présentant un point singulier essentiel sur le cercle $\{|z| = 1\}$. *Réponse*: $f(z) = (z - 1)e^{1/(z-1)}$.

5. Soit D un domaine limité par une courbe de Jordan différentiable γ. Etablir des conditions sous lesquelles une fonction f définie sur la frontière γ se prolonge holomorphement à D. [Nota : comparer avec l'exercice 3 du chapitre II].

6. Soit D un domaine traversé par l'axe réel $\mathbf{R}$. Montrer que si une fonction f est holomorphe et bornée dans $D \setminus \mathbf{R}$ et que $|f(z) - f(\bar{z})| \to 0$ lorsque $z \to D \cap \mathbf{R}$, alors f se prolonge holomorphement dans D.

7. Montrer que $\sin z$ est une fonction (univalente) de $\zeta = z(\pi - z)$.

8. Montrer que la fonction $z^\alpha(1 - z)^\beta$, où α et β sont des nombres réels, possède des déterminations holomorphes dans $\mathbf{C} \setminus [0, 1]$ si $\alpha + \beta$ est entier.

9. Calculer les résidus des déterminations de la fonction $e^{1/(1+\sqrt{z})}$ au point $z = 1$.

10. Soit f une fonction holomorphe à l'extérieur de la coupure $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$, prolongeable par continuité aux lèvres de cette coupure et dont les valeurs limites satisfont à la relation $f(x + i0) - f(x - i0) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$, où g est une fonction entière,

$g(0) = 0$. Montrer que $f(z) = -\frac{g(z)}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + h(z)$, où Ln est la détermination du logarithme holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ et h est une fonction entière.

11. Soit f une fonction holomorphe dans l'adhérence d'un domaine multiplement connexe D tel que celui du théorème 5 du n° 18. Montrer que les intégrales de f le long de deux chemins de D d'extrémités communes ne peuvent différer que de la quantité $\sum m_\nu \Gamma_\nu$, où m_ν sont des nombres entiers et

$$\Gamma_\nu = \int_{\gamma_\nu} f \, dz \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

12. Montrer qu'une fonction $\mathcal{F}$ analytique dans l'adhérence d'un domaine D tel que celui de l'exercice 11 possède une partie réelle univalente si et seulement si a) la dérivée $\mathcal{F}'(z)$ est holomorphe dans $\bar{D}$ et b) les intégrales $\int_{\gamma_\nu} \mathcal{F}'(z) \, dz$ sont toutes imaginaires.

13. Montrer que toute fonction $\mathcal{F}$ analytique dans la couronne $\{r < |z| < R\}$ de module univalent est de la forme $\mathcal{F}(z) = z^\alpha f(z)$, où f est une fonction holomorphe dans cette couronne et α une constante réelle.

14. Soit f une fonction holomorphe et non nulle dans un domaine simplement connexe D. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction g holomorphe dans D telle que $g^n = f$ sur D; citer un exemple mettant en défaut cette assertion pour des domaines multiplement connexes.

15. Décrire les points singuliers et la surface de Riemann de la fonction $w = \operatorname{arc\,tg} z$ inverse de $w = \operatorname{tg} z$. [N o t a : trouver son expression en fonction du logarithme.]

16. Construire une application conforme du tore

$$x = (R + r\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\psi)\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi$$

sur un rectangle dont les côtés opposés sont identifiés *). [N o t a : la différentielle d'arc sur le tore est

$$ds = \sqrt{(R + r\cos\varphi)^2 \, d\varphi^2 + r^2 \, d\psi^2}\,;$$

en posant $\xi = \varphi$, $\eta = \int_0^\psi \frac{r\,dt}{R + r\cos t}$, on obtient $ds = (R + r\cos\psi) \times \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$. Donc $(\varphi, \psi) \to (\xi, \eta)$ est l'application cherchée.]

*) On verra au chapitre suivant qu'un tel rectangle peut être appliqué de façon conforme sur une surface à deux feuillets située au-dessus du plan (cf. exercice 18 chapitre IV) et on s'assurera par le même que le tore s'applique de façon conforme sur une surface de Riemann au sens élémentaire.

CHAPITRE IV

ÉLÉMENTS DE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

Avec ce chapitre nous entrons dans le domaine de la théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe. On étudiera les problèmes fondamentaux de la théorie des applications conformes ainsi que les principes géométriques touchant aux propriétés les plus générales des fonctions holomorphes.

§ 11. Principes géométriques

34. Principe de l'argument. Soit f une fonction holomorphe et non nulle dans un voisinage pointé $\{0 < |z - a| < r\}$ d'un point $a \in \mathbf{C}$. On appellera *résidu logarithmique* de la fonction f en a le résidu de la dérivée logarithmique

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln f(z) \tag{1}$$

de f en a.

En plus des points singuliers isolés (à caractère univoque) la fonction f peut présenter un résidu logarithmique non nul en ses zéros. Soit $a \in \mathbf{C}$ un zéro d'ordre n d'une fonction f holomorphe en a; dans un voisinage U_a on a alors $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$, où φ est une fonction holomorphe et non nulle dans U_a. Donc dans U_a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où le second facteur est holomorphe donc développable en une série de Taylor dont le terme libre est égal à n (à la valeur de ce facteur pour $z = a$). Dans U_a on a donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\{n + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\} =$$
$$= \frac{n}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + \ldots, \tag{2}$$

d'où il résulte qu'en un zéro d'ordre n la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe présente un pôle simple de résidu n: *le résidu logarithmique en un zéro est égal à l'ordre de ce zéro.*

Si a est un pôle d'ordre p d'une fonction f, alors $1/f$ possède en ce point un zéro d'ordre p et puisque

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln \frac{1}{f(z)},$$

on déduit, compte tenu de (2), qu'en un pôle d'ordre p la dérivée logarithmique d'une fonction présente un pôle d'ordre un de résidu $-p$: *le résidu logarithmique en un pôle est égal à l'ordre de ce pôle pris avec le signe opposé.*

Ces remarques nous permettent de suggérer une méthode de calcul du nombre de zéros et de pôles des fonctions méromorphes. Dans la suite on conviendra de compter chaque zéro et chaque pôle un nombre de fois égal à son ordre. On a le

Théorème 1. *Soient f une fonction méromorphe *) dans un domaine $D \subset \mathbf{C}$, $G \Subset D$ un domaine dont le bord ∂G est une courbe continue ne contenant aucun zéro et aucun pôle de f. Si N et P désignent respectivement les nombres de zéros et de pôles de f dans le domaine G, alors*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z, \tag{3}$$

où ∂G est orientée.

▶ Puisque $G \Subset D$, la fonction f ne possède dans G qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_l$ et de pôles $b_1, \ldots, b_m$. Par ailleurs, ∂G ne contenant ni zéros ni pôles de f, la fonction $g = f'/f$ est holomorphe au voisinage de ∂G. En appliquant le théorème des résidus à cette fonction, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} \, \mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{l} \operatorname*{res}_{a_\nu} g + \sum_{\nu=1}^{m} \operatorname*{res}_{b_\nu} g. \tag{4}$$

Mais d'après la remarque ci-dessus

$$\operatorname*{res}_{a_\nu} g = n_\nu, \quad \operatorname*{res}_{b_\nu} g = -p_\nu,$$

où n_ν et p_ν sont les ordres respectifs du zéro a_ν et du pôle b_ν ; en portant ceci dans (4) et en tenant compte de la convention relative au calcul des zéros et des pôles (et en vertu de laquelle $N = \sum n_\nu$ et $P = \sum p_\nu$) on obtient (3). ◀

✱ Soit f une fonction satisfaisant aux conditions du théorème 1 dans un domaine G et soit g une fonction holomorphe dans $\bar{G}$. Mon-

*) On dit qu'une fonction f est méromorphe dans un domaine D si elle est holomorphe partout sur D sauf éventuellement aux pôles.

trer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{l} g(a_k)-\sum_{k=1}^{m} g(b_k), \tag{5}$$

où la première somme est étendue à tous les zéros et la seconde à tous les pôles de la fonction f dans le domaine G. Ceci généralise le théorème 1 : la relation (5) entraîne (3) pour $g\equiv 1$ (chaque zéro et chaque pôle est compté un nombre de fois égal à son ordre). ✱

Ce théorème peut être énoncé sous une forme géométrique. Supposons que ∂G est un chemin $z=z(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ et désignons par $\Phi(t)$ une primitive de la fontion f'/f le long de ce chemin ; la formule de Newton — Leibniz nous donne

$$\int_{\partial G}\frac{f'}{f}\,dz=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha). \tag{6}$$

Mais il est évident que $\Phi(t)=\operatorname{Ln} f[z(t)]$, où Ln désigne une détermination quelconque du logarithme, variant continûment le long du chemin ∂G. Puisque $\ln|f|=\operatorname{Ln}|f|+i\arg f$ et que la fonction $\operatorname{Ln}|f(z)|$ est univalente, pour définir cette détermination il suffit de définir une détermination de $\arg f$ variant continûment le long de ∂G. L'accroissement de $\operatorname{Ln}|f|$ le long du chemin fermé ∂G est nul, donc

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=i\{\operatorname{Arg} f[z(\beta)]-\operatorname{Arg} f[z(\alpha)]\}.$$

Le second membre est le produit par i de l'accroissement de la détermination retenue. En désignant cet accroissement par $\Delta_{\partial G}\operatorname{Arg} f$, on peut mettre (6) sous la forme

$$\int_{G\partial}\frac{f'}{f}\,dz=i\Delta_{\partial G}\operatorname{Arg} f.$$

Le théorème 1 peut donc s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème 2 (principe de l'argument). *Dans les conditions du théorème* 1, *la différence entre le nombre N de zéros et le nombre P de pôles d'une fonction f dans D est égale à l'accroissement de l'argument de f le long de la frontière orientée ∂G divisé par* 2π :

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\operatorname{Arg} f. \tag{7}$$

Il est évident que le second membre de (7) est le nombre total de rotations effectuées par le vecteur $w=f(z)$ autour du point $w=0$ lorsque z parcourt le chemin ∂G. Soit ∂G^* l'image du chemin ∂G par l'application f, i.e. le chemin $w=f[z(t)]$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$; ce nombre

sera alors égal au nombre de rotation du vecteur w lorsque z parcourt le chemin ∂G^* (fig. 70). Ce nombre s'appelle *indice* du chemin ∂G^* par rapport au point $w = 0$ et se désigne par $\operatorname{ind}_0 \partial G^*$. Le principe de l'argument devient maintenant:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G^*} \operatorname{Arg} w = \operatorname{ind}_0 \partial G^*. \tag{8}$$

Remarque 1. Au lieu des zéros de la fonction f on peut envisager ses a-points, i.e. les racines de l'équation $f(z) = a$; il suffit pour cela de remplacer dans nos raisonnements la fonction f par la fonction $f(z) - a$. Si ∂G ne contient pas de a-points (et pas de pôles comme précédemment) de la fonction f, alors

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z) - a} \, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta \partial_{\partial G} \operatorname{Arg} \{f(z) - a\}, \tag{9}$$

où N_a est le nombre total de a-points de f dans D. En se plaçant dans le plan $w = f(z)$ et en introduisant la notion d'indice du chemin ∂G^* par rapport au point a, on peut mettre (9) sous la forme

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G^*} \operatorname{Arg} (w - a) = \operatorname{ind}_a \partial G^*. \tag{10}$$

Remarque 2. La seconde partie de la formule (7) — l'accroissement de l'argument de la fonction le long d'un chemin — a un sens pour des fonctions continues f, non nulles le long de ce chemin (même si sa première définition à l'aide d'une intégrale est subordonnée à l'existence de la dérivée f', i.e. implique l'holomorphie de f). Cette quantité, égale à l'indice de l'image ∂G^* du chemin, est de nature topologique: elle est invariante par toute transformation topologique des plans z et w. Il se trouve qu'on peut introduire les définitions de l'ordre des zéros et des pôles qui sont invariantes par les transformations topologiques (des définitions qui ne sont pas liées aux dérivées ou aux développements en séries). Le principe de l'argument revêt alors un caractère topologique: il sera valable pour toutes les fonctions topologiquement équivalentes à des fonctions méromorphes (i.e. provenant de fonctions méromorphes par des transformations topologiques sur les variables). Le lecteur intéressé par ces questions pourra trouver un exposé détaillé dans l'ouvrage de S. Stoïlow.

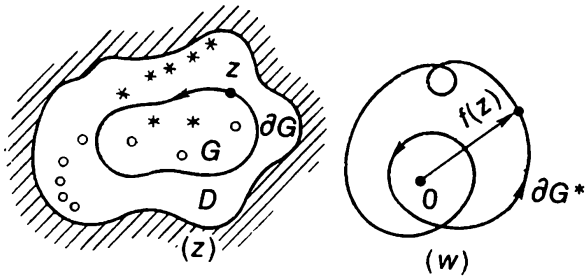

Fig. 70

Citons un exemple d'application du principe de l'argument.

Théorème 3 (Rouché *)). *Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine fermé G de frontière ∂G continue, et soit*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \textit{pour tout } z \in \partial G. \tag{11}$$

Alors les fonctions f et $f+g$ possèdent le même nombre de zéros dans D.

▶ On voit sur (11) que f et $f+g$ ne s'annulent pas sur ∂G**), on peut donc leur appliquer le principe de l'argument. Puisque $f \neq 0$ sur ∂G, on a $f+g = f(1+g/f)$ et donc un choix convenable des valeurs des arguments nous donne

$$\Delta_{\partial G} \operatorname{Arg}(f+g) = \Delta_{\partial G} \operatorname{Arg} f + \Delta_{\partial G} \operatorname{Arg}\left(1+\frac{g}{f}\right). \tag{12}$$

Mais puisque $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ sur ∂G, le point $\omega = \frac{g}{f}$ reste à l'intérieur du disque $\{|\omega| < 1\}$ lorsque z parcourt ∂G. Donc le vecteur $w = 1+\omega$ n'effectue aucune rotation autour de $w = 0$ et le second terme de (12) est nul. Par conséquent $\Delta_{\partial G} \operatorname{Arg}(f+g) = \Delta_{\partial G} \operatorname{Arg} f$ et le principe de l'argument nous conduit à l'assertion du théorème. ◀

Le théorème de Rouché est utile pour le calcul du nombre de zéros des fonctions holomorphes. Il permet, en particulier, de déduire aisément la propriété fondamentale des polynômes:

Théorème 4. *Tout polynôme P_n de degré n possède exactement n zéros dans* **C**.

▶ Puisque P_n possède un pôle à l'infini, tous ses zéros sont situés dans un disque $\{|z| < R\}$. Soit $P_n = f+g$, où $f = a_0 z^n$ $(a_0 \neq 0)$ et $g = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; quitte à augmenter R, on peut admettre que sur le cercle $\{|z| = R\}$ on a $|f| > |g|$, puisque $|f| = |a_0| R^n$ et g est un polynôme de degré $\leqslant n-1$. D'après le théorème de Rouché P_n possède dans le disque $\{|z| < R\}$ autant de zéros que $f = a_0 z^n$, i.e. exactement n. ◀

✱ 1. Trouver le nombre de zéros du polynôme $z^4 + 10z + 1$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

2. Montrer que tout polynôme à coefficients réels se décompose en un produit de polynômes du premier et du second degré à coefficients réels. ✱

35. Principe de conservation du domaine. C'est ainsi qu'on appelle l'important théorème suivant:

---

*) Eugène Rouché (1832-1910), mathématicien français.

**) En effet, $|f| > |g| \geqslant 0$ et $|f+g| \geqslant |f| - |g| > 0$ sur ∂G.

Théorème 1 *). *Si une fonction f est holomorphe et non identiquement constante dans un domaine D, l'image $D^* = f(D)$ est aussi un domaine.*

▶ Il faut prouver que l'ensemble D^* est connexe et ouvert. Soient w_1 et w_2 deux points quelconques de D^* ; z_1 et z_2 des antécédents respectifs de w_1 et w_2 dans D. L'ensemble D étant connexe (par arcs), il existe un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ joignant z_1 et z_2. La fonction j étant continue, l'image $\gamma^* = f \circ \gamma$ sera un chemin reliant w_1 et w_2 et ce chemin est visiblement composé de points de D^*. Donc l'ensemble D^* est connexe.

Soient w_0 un point de D^* et z_0 un des ses antécédents dans D. Le domaine D étant ouvert, il existe un disque $\{|z - z_0| < r\} \Subset D$. Quitte à diminuer r, on peut admettre que le disque fermé $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ ne contient aucun w_0-point autre que z_0 (puisque $f \neq$ const, le théorème d'unicité du n° 22 nous dit que les w_0-points de f sont isolés dans D). Soit $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ et soit

$$\mu = \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|. \tag{1}$$

Il est évident que $\mu > 0$, puisque la fonction continue $f(z) - w_0$ atteint sur γ son minimum en valeur absolue (μ ne peut pas être nul, car la fonction f présenterait un w_0-point sur γ, ce qui est contraire à la construction du disque).

Montrons maintenant que $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$. Soit w_1 un point de ce disque, i.e. $|w_1 - w_0| < \mu$. On a

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1), \tag{2}$$

et de plus $|f(z) - w_0| \geqslant \mu$ sur γ en vertu de (1). Puisque $|w_0 - w_1| < \mu$, le théorème de Rouché nous dit que la fonction $f(z) - w_1$ possède à l'intérieur de γ autant de zéros que la fonction $f(z) - w_0$, i.e. au moins un (le point z_0 peut être un zéro multiple). Ainsi la fonction f prend la valeur w_1 à l'intérieur de γ, i. e $w_1 \in D^*$. Or w_1 est un point arbitraire du disque $\{|w - w_0| < \mu\}$, donc le disque tout entier appartient à D^*. Ce qui prouve que D^* est ouvert. ◀

Remarque. On vient de voir que la démonstration de la connexité de l'ensemble D^* n'impliquait que la continuité de f, alors que pour prouver que D^* était ouvert on s'est servi du théorème d'unicité et du théorème de Rouché, établis plus haut pour les fonctions holomorphes. Le fait que l'image D^* est un ouvert est mis en défaut si f est une fonction continue arbitraire. On peut s'en assurer sur l'exemple suivant: soit $f = x^2 + iy$ et $D = \{|z| < 1\}$; alors $D^* = f(D)$ n'est pas un ensemble ouvert, car les images des points du diamètre vertical de D (les points intérieurs à ce disque) sont des points frontières de D^*.

*) Ce théorème est dû à B. Riemann (1851).

On peut néanmoins prouver que le principe de conservation du domaine (de même que le théorème d'unicité et le théorème de Rouché sur lesquels repose ce prinipe) est de nature topologique, i.e. est valable pour toutes les fonctions topologiquement équivalentes à des fonctions holomorphes.

✱ 1. Résoudre l'exercice 2) de la page 34 sans faire de calculs.

2. Soit f une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, réelle sur l'axe réel et bornée; montrer que $f \equiv \text{const}$. ✱

Un examen identique mais plus détaillé nous conduit au problème de l'inversion locale des fonctions holomorphes. La position de ce problème est la suivante:

Etant donnée une fonction $w = f(z)$ holomorphe en un point z_0, trouver une fonction $z = g(w)$ analytique au point $w_0 = f(z_0)$ et telle que $g(w_0) = z_0$ et $f \circ g(w) \equiv w$ dans un voisinage de w_0.

On distinguera deux cas:

I. Le point z_0 n'est pas critique: $f'(z_0) \neq 0$. Choisissons comme dans la démonstration du principe de conservation du domaine un disque $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ ne contenant pas de w_0-points autres que le centre et définissons $\mu > 0$ à l'aide de la formule (1). Soit w_1 un point quelconque du disque $\{|w - w_0| < \mu\}$; le même raisonnement (moyennant la formule (2) et le théorème de Rouché) montre que la fonction f prend dans le disque $\{|z - z_0| < r\}$ la valeur w_1 autant de fois que la valeur w_0. Or la valeur w_0 n'est prise dans ce disque qu'au point z_0 et ce une seule fois en vertu de la condition $f'(z_0) \neq 0$.

Donc la fonction f prend dans le disque $\{|z - z_0| < r\}$ toute valeur du disque $\{|w - w_0| < \mu\}$ et ce une seule fois. En d'autres termes, la fonction f est *localement univalente au point* z_0.

Ceci définit dans le disque $\{|w - w_0| < \mu\}$ une fonction $z = g(w)$ telle que $g(w_0) = z_0$ et $f \circ g(w) \equiv w$. L'univalence de f entraîne que $\Delta w \neq 0$ pour $\Delta z \neq 0$, d'où il s'ensuit de toute évidence qu'existe en tout point du disque $\{|w - w_0| < \mu\}$ la dérivée

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \tag{3}$$

i.e. la fonction g est holomorphe dans ce disque *).

II. Le point z_0 est critique: $f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$ $(p \geqslant 2)$. Reprenons les mêmes raisonnements en veillant maintenant à ce que le disque $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ ne contienne ni de w_0-points autres que le centre, ni de zéros de la dérivée f' (utilisons

*) On voit sur (3) que pour que la dérivée g' existe, il faut encore que $f' \neq 0$. La fonction f' étant continue et puisque $f'(z_0) \neq 0$, on peut admettre que le disque $\{|z - z| < r\}$ ne contient pas de points critiques, quitte à diminuer r.

encore le théorème d'unicité). Comme précédemment, définissons $\mu > 0$, prenons un point quelconque w_1 du disque $\{| w - w_0 | < \mu\}$ et assurons-nous que la fonction f prend dans le disque $\{| z_0 - z_0 | < r\}$ le même nombre de fois la valeur w_1 et la valeur w_0. Des conditions du cas envisagé il s'ensuit que la valeur w_0 est prise p fois au point z_0. Puisque $f'(z) \neq 0$ pour $0 \leqslant | z - z_0 | < r$, toute valeur w_1, $0 \leqslant | w_1 - w_0 | < \mu$, est prise par la fonction f en p points distincts du disque $\{| z - z_0 | < r\}$. Donc la *fonction f est p-valente dans le disque* $\{ | z - z_0 | < r\}$.

Déterminons maintenant la nature de la solution du problème d'inversion locale dans ce cas. Dans un voisinage du point z_0, on a

$$w = f(z) = w_0 + (z - z_0)^p \varphi(z), \tag{4}$$

où φ est une fonction holomorphe non nule. D'où

$$\sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z - z_0) = (w - w_0)^{1/p}, \tag{5}$$

où $\sqrt[p]{\varphi}$ représente une détermination quelconque holomorphe dans le voisinage considéré. Cette détermination se développe en une série de Taylor de centre z_0 et de terme constant non nul, donc pour $\psi(z) = \sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z - z_0)$ on a $\psi'(z_0) \neq 0$. En posant $(w - w_0)^{1/p} = \omega$ on peut mettre (5) sous la forme $\psi(z) = \omega$. De là on peut en utilisant le cas I, déterminer z comme une fonction holomorphe de $w : z = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \omega^n$. En portant ensuite $\omega = (w - w_0)^{1/p}$ dans le dernier développement, on obtient la série de Puiseux de la fonction inverse de f:

$$z = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (w - w_0)^{n/p}. \tag{6}$$

On voit que g est une fonction analytique dans le disque $\{| w - w_0 | < \mu\}$ et que w_0 est un point de branchement d'ordre p de g (cf. n° 31).

De cette analyse il s'ensuit en particulier le

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f holomorphe soit localement injective en un point z_0 est que $f'(z_0) \neq 0$.*

Remarque 1. La suffisance résulte du théorème général des fonctions implicites (le jacobien $J_f(z) = | f'(z) |^2$ de l'application $(x, y) \to (u, v)$ est différent de 0 au point envisagé). Mais la condition $J_f(z) \neq 0$ n'est pas une condition nécessaire d'injectivité pour les applications **R**-différentiables. Ceci est visible sur l'exemple de l'application $f = x^3 + iy$ qui est injective bien que son jacobien soit nul au point $z = 0$.

Remarque 2. La condition d'injectivité locale $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$ n'est pas une condition suffisante d'injectivité globale de f pour tout $z \in D$. On le voit sur l'exemple de la fonction $f(z) = e^z$ qui est localement injective en tout point de $\mathbf{C}$, mais n'est injective en aucun domaine contenant au moins un couple de points z_1 et z_2 tels que $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, où $k \neq 0$ est un entier.

Nous avons développé plus haut un procédé qualitatif de résolution du problème d'inversion locale. Signalons en conclusion que les méthodes de la théorie des fonctions analytiques nous permettent de résoudre efficacement ce problème. Etudions par souci de simplicité le cas où $f'(z_0) \neq 0$.

Construisons comme plus haut les disques $\{|z - z_0| \leqslant r\}$ et $\{|w - w_0| < \mu\}$ et considérons la fonction $h(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ pour tout w fixe contenu dans le second disque. Cette fonction est holomorphe partout dans le premier disque sauf au point $z = g(w)$, où g est l'inverse de f, et de plus le résidu de h en ce point (qui est un pôle simple) est égal à z. Donc, d'après le théorème des résidus

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \, d\zeta, \tag{7}$$

où $\gamma = \{|\zeta - z_0| = r\}$.

L'intégrale du second membre dépend de w. On a ainsi obtenu la représentation intégrale de la fonction inverse $g(w)$. De même qu'on a déduit le développement de Taylor à partir de l'intégrale de Cauchy, de même on peut obtenir le développement de g en série entière à partir de cette représentation intégrale. On a

$$\frac{1}{f(\zeta) - w} = \frac{1}{f(\zeta) - w_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w_0)^n}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}}$$

et ce développement converge uniformément en ζ sur le cercle γ (on a $|f(\zeta) - w_0| \geqslant \mu$ sur γ et $|w - w_0| < \mu$). En multipliant ce développement par $\frac{\zeta f'(\zeta)}{2\pi i}$ et en intégrant terme à terme le long de γ, on trouve

$$z = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (w - w_0)^n, \tag{8}$$

où

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta) \, d\zeta}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

On a de toute évidence $d_0 = z_0$ et pour $n \geqslant 1$ on peut transformer l'expression obtenue par une intégration par parties:

$$d_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_\gamma \frac{d\zeta}{[f(\zeta) - w_0]^n}.$$

L'intégrant présente à l'intérieur de γ un pôle d'ordre n en z_0. En calculant son résidu à l'aide de la formule classique du n° 26 on obtient l'expression définitive des coefficients:

$$d_0 = z_0, \quad d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

La série (8) de coefficients (9) s'appelle *série de Bürman — Lagrange**). On peut l'appliquer à l'inversion des fonctions holomorphes.

Exemple. Soit $f(z) = ze^{-az}$. Trouver l'inverse de cette fonction au point $w_0 = 0$ associé à $z_0 = 0$. La formule (9) nous donne pour $n \geqslant 1$.

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n = \frac{(an)^{n-1}}{n!},$$

et la série de Bürman—Lagrange s'écrit

$$z = g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n. \tag{10}$$

On peut indiquer aussi une généralisation de la *série de Bürman — Lagrange* au cas où $f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, $p \geqslant 2$, mais on glissera là-dessus.

36. Notion de fonction algébrique. Cette notion joue un rôle important en analyse et ses applications. On exhibera ici deux définitions d'une fonction algébrique et on montrera qu'elles sont équivalentes. Pour formuler la première rappelons que les points singuliers algébriques d'une fonction analytique sont par définition les points de branchement d'ordre fini au voisinage desquels les déterminations de cette fonction tendent vers des limites finies ou infinies, ainsi que les pôles de ces déterminations (n° 31).

Définition 1. On appelle *fonction algébrique* une fonction finivalente **) analytique dans $\mathbf{C}$ dont l'ensemble $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ des

---

*) Cette série figure dans les travaux de Largange (1770) et de Bürman (1779). Ces deux savants l'ont obtenue sans se servir de la représentation intégrale (7) et des résidus.

**) Remarquons que la finivalence d'une fonction ne découle pas des autres conditions de la définition: au-dessus d'un nombre fini de points a_j on peut avoir une infinité de points de branchement d'ordre fini.

points singuliers est un ensemble fini composé uniquement de points singuliers algébriques.

Une fonction analytique présente le même nombre d'éléments en tout point de $\overline{\mathbf{C}} \setminus A$. En effet, on peut relier deux points quelconques z', z'' de $\overline{\mathbf{C}} \setminus A$ par un chemin γ ne rencontrant pas A, donc chaque élément de la fonction envisagée se prolonge analytiquement le long de γ. Supposons que cette fonction possède au-dessus des points z' et z'' respectivement n' et n'' éléments. Le prolongement le long de γ transforme chaque élément au-dessus de z' en un élément au-dessus de z'', et de plus des éléments distincts ne peuvent se transformer en un même élément en vertu du théorème d'unicité. Donc $n'' \geqslant n'$. Les points z' et z'' sont arbitraires et en les intervertissant on obtient $n' \geqslant n''$. Donc $n' = n''$. Ce nombre commun s'appelle *ordre* de la fonction algébrique. Géométriquement, c'est le nombre de feuillets de la surface de Riemann de cette fonction (cf. n° 32).

Théorème 1. *Les valeurs d'une fonction algébrique d'ordre n vérifient l'équation algébrique*

$$p_0(z)\, w^n + p_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + p_n(z) = 0, \tag{1}$$

où p_j sont des polynômes ne possédant pas dans leur ensemble de facteur commun différent d'une constante.

▶ Pour $n = 1$ la fonction est univalente et ses singularités ne sont que des pôles en nombre fini ; elle est alors rationnelle (théorème 4 du n° 25) et par suite est le rapport de deux polynômes : $w = -p_1(z)/p_2(z)$ (ceci équivaut à (1)). Pour $n > 1$ fixons un point $z \in \overline{\mathbf{C}} \setminus A$ et désignons par $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ les valeurs prises par la fonction en ce point. Les fonctions f_j sont holomorphes au voisinage de z et se prolongent analytiquement le long de tout chemin ne passant pas par les points $a_k \in A$.

Lorsqu'on parcourt un chemin fermé entourant les points a_k, les valeurs f_j peuvent changer, mais ce changement ne peut consister qu'en un passage de la valeur $f_j(z)$ à une autre valeur $f_{j'}(z)$ prise par la fonction en ce même point (n'oublions pas que cette fonction prend n valeurs $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ en z). Donc les principales fonctions symétriques

$$\sigma_1 = f_1 + \ldots + f_n, \quad \sigma_2 = f_1 f_2 + \ldots + f_{n-1} f_n, \ \ldots, \ \sigma_n = f_1 \ldots f_n$$

ne changent pas lorsqu'on parcourt un chemin fermé entourant a_k. Les fonctions σ_j sont donc univalentes et holomorphes en dehors de l'ensemble A ; aux points de A elles ne présentent que des pôles. D'après le théorème ci-dessus elles sont donc toutes rationnelles.

On sait du cours d'algèbre que les valeurs $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont les racines de l'équation

$$w^n - \sigma_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n(z) = 0.$$

Reste à représenter σ_j par des rapports de polynômes, à multiplier les deux membres de la dernière équation par le PPCM de tous les dénominateurs de σ_j et à simplifier par les facteurs communs (non constants) de tous les numérateurs, si ces facteurs existent. On obtient une équation de la forme (1). ◀

Remarque. Le polynôme $P(z, w)$ du premier membre de l'équation (1) est *indécomposable*, i.e. qu'il ne peut être représenté par le produit de deux polynômes en z et w non constants. En effet, soit $P = P_1 P_2$; alors au voisinage d'un point $z_0 \in A$ la détermination f de la fonction algébrique envisagée satisfait à l'équation $P_1(z, f(z)) P_2(z, f(z)) = 0$. L'un au moins de ces facteurs, P_1 pour fixer les idées, s'annule une infinité de fois dans ce voisinage, donc $P_1(z, f(z)) \equiv 0$ dans ce voisinage. Mais il existe un chemin fermé dans $\overline{\mathbf{C}} \setminus A$ transformant $f(z_0)$ en une autre valeur $f_j(z_0)$ de notre fonction. Le théorème d'unicité du prolongement analytique nous dit alors que $P_1(z, f_j(z)) \equiv 0$ dans ce voisinage. Cette identité est valable pour toutes les déterminations de notre fonction, i.e. le polynôme $P_1(z, w)$ possède n racines en w et est de degré n en w. Donc le polynôme P_2 est de degré zéro en w, i.e. ne dépend que de z, or, s'il n'est pas constant, ceci contredit le fait que les coefficients de l'équation (1) ne possèdent pas de facteurs communs non constants.

Cette remarque nous permet de prouver la réciproque du théorème 1.

Théorème 2. *Les racines (en w) du polynôme algébrique indécomposable*

$$P(z, w) = p_0(z)\, w^n + \ldots + p_n(z)$$

sont les valeurs d'une fonction algébrique.

▶ Marquons les zéros du polynôme $p_0(z)$ en lesquels l'équation $P(z, w) = 0$ possède des racines infinies ainsi que les zéros du discriminant $D(z)$ du polynôme P en lesquels cette équation possède des racines multiples. Le polynôme P étant indécomposable, son discriminant $D \not\equiv 0$ *) et par suite l'ensemble $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ des points marqués est fini.

Fixons un point $z_0 \in A$ et désignons par w_0 l'un des zéros du polynôme $P(z_0, w)$; alors $P(z_0, w_0) = 0$ et la dérivée $P'_w(z_0, w_0) \neq 0$.

*) Cf. A. Kostrikine, *Introduction à l'algèbre*, trad. française, Ed. Mir, 1986, ainsi que le tome 2 de cet ouvrage.

Choisissons un voisinage $\overline{V} = \{| w - w_0 | \leqslant r\}$ ne contenant pas d'autres zéros de $P(z_0, w)$ et soit $\rho = \min\limits_{w \in \partial V} | P(z_0, w) |$, $\rho > 0$. Le polynôme P étant continu en l'ensemble des variables, il existe un voisinage $\overline{U} = \{| z - z_0 | \leqslant \delta\}$ tel que $| P(z, w) - P(z_0, w) | < \rho$ pour $(z, w) \in \overline{U} \times \overline{V}$. En posant

$$P(z, w) = P(z_0, w) + (P(z, w) - P(z_0, w)),$$

on déduit en vertu du théorème de Rouché que la fonction $P(z, w)$ possède un seul zéro $w = f(z)$ dans V pour tout $z \in V$ fixe, et d'après la formule (7) du n° 35

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V} \frac{\omega P'_w(z, \omega)}{P(z, \omega)} d\omega. \tag{3}$$

Puisque le dénominateur $P(z, \omega) \neq 0$ pour $z \in U$ et $\omega \in \partial V$, l'intégrant, donc la fonction f, sont holomorphes dans U. L'élément (U, f) se prolonge analytiquement le long de tout chemin γ ne passant pas par les points a_j et les valeurs de la fonction obtenues par ce prolongement sont racines de l'équation $P(z, w) = 0$ en vertu du théorème d'unicité. Donc la fonction analytique obtenue par ce prolongement est finivalente et ses points singuliers ne peuvent être que les points a_j: ces points sont isolés ou tout au plus des points de branchement d'ordre fini.

Soit a un de ces points; montrons que toute détermination f de notre fonction tend vers une limite finie ou infinie lorsque $z \to a$. Posons $g = (z - a)^m f$, où m est un entier positif que l'on se propose de déterminer. La fonction g satisfait de toute évidence à l'équation

$$g^n + (z - a)^m \frac{p_1}{p_0} g^{n-1} + \ldots + (z - a)^{mn} \frac{p_n}{p_0} = 0,$$

et si l'on choisit m de telle sorte que les coefficients $(z - a)^{mj} p_j(z)/p_0(z) \to 0$ lorsque $z \to a$ (ceci est possible, puisque p_0 est un polynôme), toutes les racines de cette équation (y compris les valeurs de la fonction g) tendront vers 0 lorsque $z \to a$ *). Mais alors $f = g/(z - a)^m$ tend vers une limite finie ou infinie lorsque $z \to a$, i.e. a est un point singulier algébrique.

Donc la fonction analytique construite avec les valeurs des zéros du polynôme (2) est une fonction algébrique. Reste à prouver que cette fonction épuise tous les zéros du polynôme, i.e. est n-valente. S'il n'en était pas ainsi, le polynôme $Q(z, w)$ construit à l'aide

*) En effet, considérons l'équation $w^n + c_1 w^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ et posons $s = | c_1 | + \ldots + | c_n |$. Si la racine w de cette équation est $\leqslant 1$ en module, alors $| w |^n \leqslant | c_1 w^{n-1} + \ldots + c_n | \leqslant s$ et si $| w | > 1$, alors $| w |^n \leqslant (| c_1 | + \ldots + | c_n |) | w |^{n-1}$. Dans tous les cas $| w | \leqslant \max(\sqrt[n]{s}, s)$, donc tend vers 0 lorsque $s \to 0$.

de cette fonction d'après le théorème 1 serait de degré inférieur à n et puisque pour z fixe tous les zéros de Q sont zéros de P, on en déduit que P est divisible par Q, ce qui contredit l'indécomposabilité de P. ◀

Les théorèmes 1 et 2 montrent que les fonctions algébriques peuvent être définies comme les solutions d'équations de la forme (1). Ceci explique du reste leur vaste champ d'application.

37. Principe du maximum du module et lemme de Schwarz. Ce principe est exprimé par le théorème suivant :

Théorème 1. *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D et son module $|f|$ atteint un maximum (local) en un point $z_0 \in D$, alors f est constante.*

▶ Utilisons le principe de conservation du domaine. Si $f \neq$ const, elle transforme z_0 en un point w_0 du domaine D^*. Il existe un disque $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$ et dans ce disque un point w_1 tel que $|w_1| > |w_0|$. La fonction f prend la valeur w_1 dans un voisinage du point z_0, or ceci contredit le fait que $|f|$ atteint son maximum en ce point. ◀

En tenant compte des propriétés des fonctions continues sur des ensembles fermés, on peut énoncer le principe du maximum de la manière suivante :

Théorème 2. *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D et continue dans $\overline{D}$, alors $|f|$ atteint son maximum sur ∂D.*

▶ Si $f =$ const (dans D, donc dans $\overline{D}$ en vertu de la continuité), cette assertion est triviale. Si $f \neq$ const, $|f|$ ne peut atteindre son maximum dans D, et puisque ce maximum est réalisé dans $\overline{D}$, il le sera sur ∂D. ◀

✱ 1. Soit $P(z)$ un polynôme de degré n en z et soit $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |P(z)|$; montrer que $M(r)/r^n$ est une fonction strictement décroissante.

2. Enoncer et prouver le principe du maximum pour la partie réelle d'une fonction holomorphe. ✱

Cette proposition est généralement mise en défaut pour le minimum du module. Ceci ressort de l'exemple de la fonction $f(z) = z$ dans le disque $\{|z| < 1\}$ ($|f|$ atteint son minimum au point $z = 0$). Cependant on a le

Théorème 3. *Si une fonction f est holomorphe et non nulle dans un domaine D, son module $|f|$ peut atteindre un minimum (local) à l'intérieur de D si seulement $f =$ const.*

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer le théorème 1 à la fonction $g = 1/f$ qui est holomorphe dans D, puisque $f \neq 0$.

Les résultats obtenus montrent que la surface du module d'une fonction holomorphe, i.e. la surface d'équation $\rho = |f(z)|$ dans l'espace (x, y, ρ) (cf. n° 5), présente des particularités structurelles. Plus exactement, les seuls éventuels maximums et minimums locaux qu'elle risque de posséder se trouvent sur le niveau $\rho = 0$ (les points a et b sur la figure 71). Sont horizontaux les plans tangents aux points stationnaires de la surface et en eux seuls, i.e. les points où s'annulent les deux dérivées $\frac{\partial |f|}{\partial x}$ et $\frac{\partial |f|}{\partial y}$, ou, ce qui est équivalent, les deux dérivées $\frac{\partial |f|}{\partial z}$ et $\frac{\partial |f|}{\partial \bar{z}}$. Un calcul simple nous montre que *)

$$\frac{\partial |f|}{\partial z} = \frac{\bar{f}}{2|f|} f'(z), \quad \frac{\partial |f|}{\partial \bar{z}} = \frac{f}{2|f|} \overline{f'(z)}, \tag{1}$$

d'où il résulte que les points stationnaires de la fonction f peuvent être soit ses zéros (les minimums de $|f|$ sur le niveau $\rho = 0$ tels le point c de la figure 71), soit les zéros de sa dérivée f' (les points selles tels le point d de la figure 71).

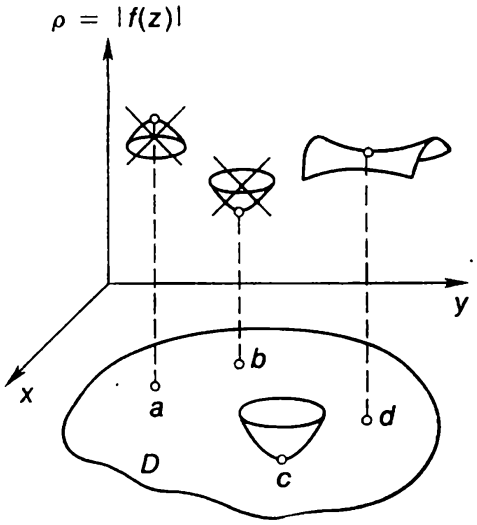

Fig. 71

Le principe du maximum du module possède d'importantes applications en théorie des fonctions. Il permet par exemple d'expliquer facilement pourquoi le théorème de Runge (n° 23) n'est pas valable pour les domaines multiplement connexes. En effet, dans un domaine multiplement connexe D il existe une courbe de Jordan fermée qui contient en son intérieur au moins un point $z_0 \notin D$. Si une fonction est approximée uniformément sur tout compact $K \Subset D$ par des polynômes, il existe une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers f sur γ. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber un entier N tel que pour tous $m, n \geqslant N$ l'on ait

$$|P_m(z) - P_n(z)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } z \in \gamma.$$

*) Les formules (1) se déduisent par une dérivation formelle de la fonction $|f| = \sqrt{f\bar{f}}$ par rapport à z et $\bar{z}$; la légitimité de cette opération résulte des formules évidentes

$$\frac{\partial |f|}{\partial x} = \frac{uu_x + vv_x}{|f|}, \quad \frac{\partial |f|}{\partial y} = \frac{uu_y + vv_y}{|f|}.$$

Le principe du maximum du module nous dit que ces inégalités sont valables en tout point du domaine G limité par la courbe γ, ce qui entraîne en vertu du même critère la convergence uniforme de la suite P_n dans G. D'après le théorème de Weierstrass (n° 23) $\lim_{n\to\infty} P_n$ est une fonction holomorphe dans G. Mais sur $G \cap D$ cette limite est confondue avec f, donc f se prolonge holomorphement à G et en particulier au point z_0. Puisque toute fonction de $\mathcal{O}(D)$ ne possède pas cette propriété $\left(\text{exemple : la fonction } \frac{1}{z-z_0}\right)$, toute fonction de $\mathcal{O}(D)$ ne peut être uniformément approximée par des polynômes contrairement à ce qu'affirme le théorème de Runge.

✱ 1. Montrer qu'une fonction f holomorphe dans $U = \{|z| < 1\}$ et continue dans $\bar{U}$ est constante si elle ne possède pas de zéros et si $|f(z)| = 1$ pour $|z| = 1$.

2. Soient f et g des fonctions holomorphes dans U et continues dans $\bar{U}$; montrer que $|f(z)| + |g(z)|$ atteint son maximum sur $\{|z| = 1\}$. [N o t a : considérer la fonction $h = e^{i\alpha}f + e^{i\beta}g$ avec des constantes α et β convenablement choisies.] ✱

Une conséquence simple du principe du maximum du module est le

Lemme de Schwarz *). *Soit f une fonction holomorphe dans le disque $U = \{|z| < 1\}$ telle que $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in U$ et $f(0) = 0$. Alors pour tout $z \in U$*

$$|f(z)| \leqslant |z| \tag{2}$$

et de plus, si l'égalité est réalisée au moins en un point $z \neq 0$, elle le sera partout dans U et dans ce cas $f(z) \equiv e^{i\alpha}z$, où α est une constante réelle.

▶ Considérons la fonction $\varphi(z) = f(z)/z$; cette fonction est holomorphe dans U, puisque $f(0) = 0$. Considérons un disque $U_r = \{|r| < r\}$, $r < 1$; d'après le théorème 2 la fonction $|\varphi|$ atteint son maximum sur la frontière $\gamma_r = \{|z| = r\}$ **). Mais sur γ_r, on a $|\varphi| \leqslant 1/r$, car par hypothèse $|f| \leqslant 1$, donc pour tout $z \in U_r$

$$|\varphi(z)| \leqslant 1/r. \tag{3}$$

Fixons z et faisons tendre r vers 1 ; de l'inégalité (3) on déduit alors que $|\varphi(z)| \leqslant 1$, i.e. $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in U_r$. Ceci prouve

*) Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand, élève de Weierstrass. Cet important lemme figure dans ses travaux de 1869-1870.

**) Ce raisonnement n'est pas directement valable sur le disque U, car f, donc φ, ne sont généralement pas définies sur sa frontière.

l'inégalité (2), puisque tout point $z \in U$ peut être compris dans un disque U_r, $r < 1$.

Si dans (2) l'égalité est réalisée en un point quelconque $z_0 \in U$, alors $|\varphi|$ atteint son maximum 1 en ce point. La fonction φ est alors une constante de module visiblement égal à 1, i.e. $\varphi(z) = e^{i\alpha}$ et $f(z) \equiv e^{i\alpha}z$. ◀

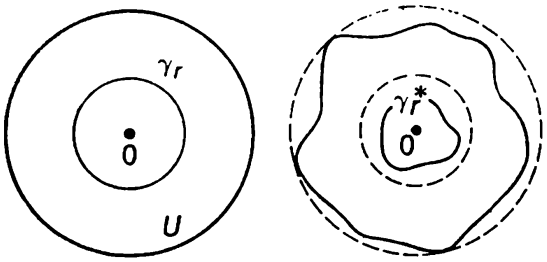

Fig. 72

Du lemme de Schwarz il s'ensuit que l'application holomorphe f d'un disque $\{|z| < 1\}$ dans un disque $\{|w| < 1\}$ envoyant centre dans centre, donne de tout cercle $|\{z| = r\}$ un cercle compris à l'intérieur du disque $\{|w| < r\}$ (fig. 72). Ceci étant, l'image de $\{|z| = r\}$ ne peut posséder des points communs avec le cercle $\{|w| = r\}$ que dans le cas où f se ramène à une rotation autour du point $z = 0$.

✱ 1. Montrer que dans les conditions du lemme de Schwarz $|f'(0)| \leqslant 1$ et l'égalité n'est réalisée que dans le cas où $f(z) \equiv e^{i\alpha}z$.

2. Soient $f \in \mathcal{O}(U)$, $f: U \to U$ et $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$; montrer que $|f(z)| \leqslant |z|^k$ pour tout $z \in U$. ✱

§ 12. Théorème de Riemann

Toute fonction f holomorphe et univalente dans un domaine D définit une application conforme de ce domaine, car comme prouvé au n° 35, son univalence exprime que D ne contient pas de points critiques. Nous avons à plusieurs reprises étudié les transformations réalisées par des fonctions données. Nous étudions ici le problème inverse qui est plus compliqué et plus important pour la pratique:

Etant donnés deux domaines D_1 et D_2, on demande de trouver une application conforme (univalente) $f: D_1 \to D_2$.

38. Isomorphismes et automorphismes conformes. Définition. Une application conforme (univalente) f de D_1 sur D_2 sera encore appelée *isomorphisme (conforme)* et les domaines D_1 et D_2, *isomorphes.* L'isomorphisme d'un domaine sur lui-même s'appelle *automorphisme (conforme)*.

Il est aisé de voir que l'ensemble des automorphismes $\varphi: D \to D$, où D est un domaine quelconque, forme un groupe appelé *groupe des automorphismes* de D et noté Aut D. L'opération de groupe est la composition $\varphi_2 \circ \varphi_1$, l'unité, l'application identique $e: z \to z$, et l'inverse de φ, l'application $z = \varphi^{-1}(w)$ inverse de $w = \varphi(z)$.

La richesse du groupe des automorphismes Aut D permet de juger de celle des applications conformes d'un autre domaine sur D. Ceci est exprimé par le

Théorème 1. *Si $f_0 : D_1 \to D_2$ est un isomorphisme fixé, l'ensemble de tous les isomorphismes de D_1 sur D_2 est donné par la formule*

$$f = \varphi \circ f_0, \tag{1}$$

où $\varphi \in$ Aut D_2 est un automorphisme arbitraire de D_2.

▶ Pour tout $\varphi \in$ Aut D_2, la composition $\varphi \circ f_0$ sera visiblement une application conforme de D_1 sur D_2. Soit d'autre part $f : D_1 \to D_2$ un isomorphisme arbitraire; alors $\varphi = f \circ f^{-1}$ sera une application conforme de D_2 sur D_2, i.e. un automorphisme de D_2, et cette formule entraîne (1). ◀

Dans la suite on se limitera aux domaines D simplement connexes. Distinguons trois d'entre eux que nous appellerons *canoniques*: le plan fermé $\overline{\mathbf{C}}$, le plan ouvert $\mathbf{C}$ et le disque unité $U = \{|z| < 1\}$. Au n° 10 nous avons déterminé les groupes des automorphismes homographiques de ces domaines. Cependant on a le

Théorème 2. *Tout automorphisme conforme d'un domaine canonique est homographique.*

▶ Soit φ un automorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$; il existe un point unique $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ associé au point à l'infini, donc la fonction φ est holomorphe partout dans $\overline{\mathbf{C}}$ sauf en z_0 où elle présente un pôle. La fonction φ n'est pas univalente au voisinage d'un pôle d'ordre $n \geqslant 2$, donc elle présente un pôle simple en z_0. Le théorème 4 du n° 25 nous permet de conclure que φ est de la forme $\varphi(z) = \dfrac{A}{z - z_0} + B$ pour $z_0 \neq \infty$ ou $\varphi(z) = Az + B$ pour $z_0 = \infty$ (A et B sont des constantes). La fonction φ est donc homographique. Les raisonnements sont identiques si l'on se place dans le plan ouvert $\mathbf{C}$.

Soit φ un automorphisme du disque unité U; posons $\varphi(0) = w_0$ et construisons l'automorphisme homographique

$$\lambda : w \to \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}$$

du disque U qui envoie w_0 dans 0. La composition $f = \lambda \circ \varphi$ est aussi un automorphisme de U et de plus $f(0) = 0$. Puisque par ailleurs $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in U$, la fonction f est justiciable du lemme de Schwarz qui dit que

$$|f(z)| \leqslant |z| \quad \text{pour tout } z \in U.$$

L'application inverse $z = f^{-1}(w)$ satisfait aussi aux conditions de ce lemme, donc $|f^{-1}(w)| \leqslant |w|$ pour tout $w \in U$, d'où en po-

sant $w = f(z)$, on déduit que

$$|z| \leqslant |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in U.$$

On a donc $|f(z)| \equiv |z|$ pour tout $z \in U$ et le lemme de Schwarz nous permet de conclure que $f(z) = e^{i\alpha}z$. Mais alors $\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha}z)$ est une application homographique. ◀

En tenant compte des résultats du n° 10, on obtient la description complète de tous les automorphismes (conformes) des domaines canoniques.

(I) Le plan fermé $\overline{\mathbf{C}}$:

$$\operatorname{Aut} \overline{\mathbf{C}} = \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}. \tag{2}$$

(II) Le plan ouvert $\mathbf{C}$:

$$\operatorname{Aut} \mathbf{C} = \{ z \to az + b, \quad a \neq 0 \}. \tag{3}$$

(III) Le disque unité U:

$$\operatorname{Aut} U = \left\{ z \to e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbf{R} \right\}. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que ces domaines canoniques ne sont pas isomorphes entre eux. En effet, le plan fermé (la sphère) $\overline{\mathbf{C}}$ n'est même pas homéomorphe à $\mathbf{C}$ et U, donc il ne peut être appliqué de façon conforme sur ces domaines. Les domaines $\mathbf{C}$ et U sont homéomorphes, mais il n'existe pas d'application conforme, par exemple, de $\mathbf{C}$ sur U, car cette application doit être réalisée par une fonction entière f telle que $|f(z)| < 1$ pour tout z, et d'après le théorème de Liouville $f = \text{const}$.

Un domaine dont la frontière est un ensemble vide est confondu avec $\overline{\mathbf{C}}$. Les domaines dont les frontières sont composées d'un seul point sont le plan $\overline{\mathbf{C}}$ privé d'un point; ces domaines sont de toute évidence isomorphes (voire même homographiquement) à $\mathbf{C}$. Le principal résultat de ce paragraphe — le théorème de Riemann — dit que tout domaine simplement connexe D dont la frontière est composée de plus d'un point (et donc d'une infinité, puisqu'il est connexe) est isomorphe au disque unité U.

Nous prouverons ce théorème d'existence plus loin. Pour l'instant nous allons démontrer le théorème d'unicité des applications conformes.

Théorème 3. *Si un domaine D est isomorphe au disque unité U, l'ensemble de toutes les applications conformes de D sur U dépend de trois paramètres réels. Il existe en particulier une seule application*

conforme f de D sur U normée par les conditions

$$f(z_0) = 0, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta, \tag{5}$$

où z_0 est un point arbitraire de D, et θ un nombre réel arbitraire.

▶ La première proposition résulte du théorème 1, car le groupe Aut U dépend de trois paramètres réels: les deux coordonnées du point a et le nombre α de la formule (4).

Pour prouver la deuxième proposition supposons qu'il existe deux applications f_1 et f_2 de D sur U normées par les conditions (5). Alors $\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$ sera un automorphisme de U, et de plus $\varphi(0) = 0$ et $\operatorname{Arg} \varphi'(0) = 0$. De la formule (4) on déduit alors que $a = 0$ et $\alpha = 0$, i.e. $\varphi(z) \equiv z$ ou $f_1(z) \equiv f_2(z)$. ◀

✱ Montrer qu'il existe au plus une application conforme d'un domaine D sur le disque unité U, continue dans D et normée par l'une des conditions suivantes: a) la donnée des images d'un point intérieur et d'un point frontière de D ; b) la donnée des images de trois points frontières de D. ✱

La démonstration du théorème de Riemann implique l'élaboration d'un appareil utile pour les autres questions d'analyse complexe.

39. Principe de compacité. Définition 1. On dit qu'une famille $\{f\}$ de fonctions définies dans un domaine D est *localement uniformément bornée* si pour tout ensemble $K \Subset D$ il existe une constante $M = M(K)$ telle que

$$|f(z)| \leqslant M \text{ pour tout } z \in K \text{ et tout } f \in \{f\}. \tag{1}$$

La famille $\{f\}$ est dite *localement équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble $K \Subset D$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, K)$ tel que

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \tag{2}$$

pour tous $z', z'' \in K$ tels que $|z' - z''| < \delta$ et tout $f \in \{f\}$.

Théorème 1. *Si une famille $\{f\}$ de fonctions holomorphes dans un domaine est localement uniformément bornée, elle est localement équicontinue.*

▶ Soit $K \Subset D$; désignons par 2ρ la distance entre les ensembles fermés disjoints $\overline{K}$ et ∂D, i.e. $\inf\limits_{\substack{z \in K \\ \zeta \in \partial D}} |z - \zeta|$ *) et par

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z_0 \in K} \{z : |z - z_0| < \rho\}$$

*) La quantité ρ est > 0 et finie dans tous les cas, sauf pour $D = \mathbf{C}$ ou $\overline{\mathbf{C}}$, où le théorème est trivial.

le ρ-éclatement de l'ensemble K. Puisque $K^{(\rho)} \Subset D$, il existe une constante M telle que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in K^{(\rho)}$ et tout $f \in \{f\}$. Soient z', z'' des points arbitraires de K tels que $|z' - z''| < \rho$. Puisque $U_\rho = \{|z - z'| < \rho\} \subset K^{(\rho)}$, on a $|f(z) - f(z')| \leqslant 2M$ pour tout $z \in U$. L'application $\zeta = \frac{1}{\rho}(z - z')$ transforme U_ρ en un disque $\{|\zeta| < 1\}$ et la fonction $g(\zeta) = \frac{1}{2M}\{f(z' + \zeta\rho) - f(z')\}$ satisfait aux conditions du lemme de Schwarz.

D'après ce lemme $|g(\zeta)| \leqslant |\zeta|$ pour tout ζ, $|\zeta| < 1$, ou

$$|f(z) - f(z')| \leqslant \frac{2M}{\rho}|z - z'| \quad \text{pour tout } z \in U_\rho. \tag{3}$$

Pour $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \min\left(\rho, \frac{\varepsilon\rho}{2M}\right)$. De (3) on déduit alors que $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ pour tout $f \in \{f\}$ pourvu que $|z' - z''| < \rho$. ◀

Définition 2. On dit qu'une famille de fonctions $\{f\}$ définies dans un domaine D est *normale* ou *relativement compacte* *) dans D si de toute suite (f_n) de fonctions de cette famille on peut extraire une suite partielle (f_{n_k}) convergeant uniformément sur tout $K \Subset D$.

Théorème 2. (Montel **)). *Si une famille de fonctions $\{f\}$ holomorphes dans un domaine D est localement uniformément bornée, elle est normale dans D.*

▶ a) Montrons tout d'abord que si une suite $(f_n) \subset \{f\}$ converge en tout point d'un ensemble $E \subset D$ partout dense dans D, elle converge uniformément sur tout $K \Subset D$. Fixons un $\varepsilon > 0$ et un ensemble $K \Subset D$; utilisons l'équicontinuité de la famille $\{f\}$ pour subdiviser D en carrés de côtés parallèles aux axes de coordonnées du plan z et assez petits pour que pour tout couple de points z', $z'' \in K$ contenus dans un carré et tout $f \in \{f\}$ l'on ait

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/3. \tag{4}$$

L'ensemble K est recouvert par un nombre fini de carrés q_p ($p = 1, \ldots, P$); puisque E est partout dense dans D, chaque carré q_p contient un point $z_p \in E$. La suite (f_n) étant convergente sur E, il existe un nombre N tel que

$$|f_m(z_p) - f_n(z_p)| < \varepsilon/3 \tag{5}$$

pour tous m, $n > N$ et tout z_p, $p = 1, \ldots, P$.

*) On traitera les fonctions définies dans le domaine D comme les points d'un espace $A(D)$. Munissons cet espace d'une topologie en appelant *convergente* toute suite (f_n) convergeant uniformément sur tout compact $K \Subset D$. La compacité relative de la famille $\{f\}$ se ramène alors à la compacité de l'ensemble de points correspondant dans $A(R)$. Cette remarque justifie le choix de ce terme.

**) Paul Montel (1876-1937), mathématicien français.

Soit z un point arbitraire de K ; il existe un point z_p contenu dans le même carré que z et pour $m, n > N$ on aura en vertu des inégalités (4) et (5)

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant |f_m(z) - f_m(z_p)| + |f_m(z_p) - \\ - |f_n(z_p)| + |f_n(z_p) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit d'après le critère de Cauchy que la suite $\{f_n(z)\}$ converge pour tout $z \in K$ et ce uniformément sur K.

b) Montrons maintenant que de toute suite $(f_n) \subset \{f\}$ on peut extraire une suite partielle convergeant en tout point d'un ensemble $E \subset D$ partout dense dans D. Pour E choisissons un ensemble de points $z = x + iy \in D$ dont les deux coordonnées x et y sont rationnelles ; cet ensemble est visiblement dénombrable et partout dense dans D ; soit $E = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$.

La suite numérique $(f_n(z_1))$ est bornée, on peut donc en extraire une suite partielle convergente $(f_{k1}) = (f_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. La suite numérique $(f_{n1}(z_2))$ est bornée aussi, donc on peut en extraire une suite partielle convergente $(f_{k_2}) = (f_{n_{k1}})$ $(k = 1, 2, \ldots)$; la suite de fonctions (f_{n2}) converge par conséquent au moins en deux points : z_1 et z_2. Extrayons de la suite $(f_{n2}(z_3))$ une suite partielle convergente $(f_{k3}) = (f_{n_{k2}})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ telle que (f_{n3}) converge au moins en trois points z_1, z_2 et z_3. Cette opération peut être poursuivie indéfiniment. Reste à choisir la suite diagonale

$$f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots$$

Cette suite converge en tout point $z_p \in E$, car par construction tous ses termes à partir du p-ième sont extraits de la suite (f_{np}) convergente en z_p.

En combinant ce qui a été démontré dans b) et a), on obtient la proposition du théorème. ◀

Le théorème de Montel est souvent appelé *principe de compacité*.

✱ Montrer que de toute suite (f_n) de fonctions holomorphes dans un domaine D telles que $\operatorname{Re} f_n \geqslant 0$ partout dans D, on peut extraire une suite partielle localement uniformément convergente vers une fonction holomorphe ou vers ∞. ✱

Définition 3. On appelle *fonctionnelle* sur une famille de fonctions $\{f\}$ définies dans un domaine D une application $J : \{f\} \to \mathbf{C}$ (ceci exprime qu'est donnée une loi associant à toute fonction $f \in \{f\}$ un nombre complexe $J(f)$). On dit qu'une fonctionnelle J sur $\{f\}$ est continue si pour toute suite $(f_n) \in \{f\}$ uniformément convergente vers $f_0 \in \{f\}$ sur tout $K \Subset D$ on a

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f_0).$$

Exemple. Soient $\mathcal{O}(D)$ la famille des fonctions f holomorphes dans un domaine D et a un point quelconque de D. Considérons le p-ième coefficient du développement de Taylor de f en a:

$$c_p(f) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}.$$

Ce coefficient est une fonctionnelle sur la famille $\mathcal{O}(D)$; montrons qu'il est continu. Si $f_n \to f_0$ uniformément sur tout $K \Subset D$, en prenant pour K le cercle $\gamma = \{|z - a| = r\} \subset D$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un N tel que $|f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ pour tout $n > N$ et tout $z \in \gamma$. Les inégalités de Cauchy nous donnent alors

$$|c_p(f_n) - c_p(f_0)| \leqslant \varepsilon/r^p$$

pour tout $n > N$, ce qui exprime que la fonctionnelle $c_p(f)$ est continue.

Définition 4. On dit qu'une famille normale de fonctions $\{f\}$ est *compacte* si la limite de toute suite $(f_n) \in \{f\}$ uniformément convergente sur tout $K \Subset D$ appartient à $\{f\}$.

Théorème 3. *Toute fonctionnelle J continue sur une famille compacte en soi $\{f\}$ est bornée et atteint sa borne supérieure, i.e. il existe une fonction $f_0 \in \{f\}$ telle que pour tout $f \in \{f\}$*

$$|J(f_0)| \geqslant |J(f)|.$$

▶ Posons $A = \sup\limits_{f \in \{f\}} |J(f)|$. A est un nombre éventuellement infini. Par définition de la borne supérieure il existe une suite $(f_n) \in \{f\}$ telle que $|J(f_n)| \to A$. La famille $\{f\}$ étant compacte, il existe une suite partielle (f_{n_k}) convergeant uniformément sur tout $K \Subset D$ vers une fonction $f_0 \in \{f\}$. La continuité de la fonctionnelle J implique

$$|J(f_0)| = \lim_{n \to \infty} |J(f_n)| = A;$$

d'où il s'ensuit, *primo*, que $A < \infty$, *secundo* que $|J(f_0)| \geqslant |J(f)|$ pour tout $f \in \{f\}$. ◀

Dans la suite nous étudierons les familles de fonctions univalentes dans un domaine D. Le théorème suivant est utile pour démontrer la compacité de telles familles.

Théorème 4 (Hurwitz *)). *Supposons qu'une suite de fonctions (f_n) holomorphes dans un domaine D converge uniformément sur tout*

*) Adolf Hurwitz (1859-1919), mathématicien allemand, élève de Weierstrass.

$K \Subset D$ vers une fonction $f \neq$ const. Si $f(z_0) = 0$, toutes les fonctions f_n à partir d'un certain n s'annulent aussi dans tout disque $\{|z - z_0| < r\} \subset D$.

▶ Le théorème de Weierstrass nous dit que f est holomorphe dans D. D'après le théorème d'unicité il existe un ensemble $\{0 < |z - z_0| \leqslant \rho\} \Subset D$ sur lequel $f \neq 0$ (on peut admettre que $\rho < r$). Soient $\gamma = \{|z - z_0| = \rho\}$ et $\mu = \min\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$. On a $\mu > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément sur γ, il existe un N tel que

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu$$

pour tout $z \in \gamma$ et tout $n > N$. Pour un tel n le théorème de Rouché nous dit que la fonction $f_n = f + (f_n - f)$ possède à l'intérieur de γ autant de zéros que la fonction f, i.e. au moins un. ◀

Corollaire. *Si une suite de fonctions (f_n) holomorphes et univalentes dans un domaine D converge uniformément sur tout $K \Subset D$, la limite f de cette suite est une fonction soit univalente, soit constante.*

▶ Supposons que $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$ $(z_1, z_2 \in D)$ et que $f \neq$ const. Considérons une suite de fonctions $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ et un disque $\{|z - z_1| < r\}$, où $r \leqslant |z_1 - z_2|$; la fonction limite $g(z) = f(z) - f(z_2)$ s'annule en z_1, donc, d'après le théorème de Hurwitz, à partir d'un certain n toutes les fonctions $g_n(z)$ s'annuleront dans ce disque, ce qui contredit l'univalence des fonctions f_n. ◀

40. Théorème de Riemann. *Tout domaine simplement connexe D dont la frontière est composée d'au moins un point est isomorphe au disque unité U.*

L'idée de la démonstration est la suivante. On considère une famille S de fonctions f holomorphes et univalentes dans D telles que $|f| \leqslant 1$ (i.e. réalisant une application conforme de D dans le disque unité U). On fixe un point $a \in D$ et on cherche une fonction de cette famille pour laquelle la dilatation $|f'(a)|$ est maximale en a. On considère une partie $S_1 \subset S$ compacte et en se servant de la continuité de la fonctionnelle $J(f) = |f'(a)|$ on peut affirmer qu'il existe une fonction f_0 dont la dilatation est maximale en a. On s'assure enfin que f_0 réalise une application de D *sur* le disque U (et pas seulement *dans* U comme les autres fonctions de la famille).

En analyse on utilise souvent de telles *méthodes variationnelles* pour trouver une fonction possédant telle ou telle propriété extrémale.

▶ a) Montrons que dans D il existe au moins une fonction holomorphe et univalente de module $\leqslant 1$. La frontière ∂D contient par

hypothèse deux points distincts α et β ; la racine carrée $\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin dans D et puisque D est simplement connexe, le théorème de la monodromie (n° 29) nous dit que cette racine admet dans D deux déterminations univalentes φ_1 et φ_2 opposées.

Chacune de ces déterminations est univalente dans D, car l'égalité $\varphi_\nu(z_1) = \varphi_\nu(z_2)$ ($\nu = 1$ ou 2) entraîne

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}, \tag{1}$$

d'où il s'ensuit que $z_1 = z_2$, puisque la fonction homographique est univalente. Ces déterminations appliquent D respectivement sur les domaines $D_1^* = \varphi_1(D)$ et $D_2^* = \varphi_2(D)$ qui sont disjoints, sinon il existerait des points $z_1, z_2 \in D$ tels que $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)$, égalité qui entraînerait de nouveau (1). De là il s'ensuivrait que $z_1 = z_2$, i.e. que $\varphi_1(z_1) = -\varphi_2(z_2)$; ce qui est contradictoire puisque $\varphi_\nu \neq 0$ dans D.

Le domaine D_2^* contient un disque $\{|w - w_0| < \rho\}$, donc φ_1 ne prend pas dans D des valeurs de ce disque et la fonction

$$f_1(z) = \frac{\rho}{\varphi_1(z) - w_0}, \tag{2}$$

qui est visiblement holomorphe et univalente dans D est bornée : $|f_1(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$.

b) Désignons par S la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans D de module $\leqslant 1$. Cette famille n'est pas vide, car elle contient la fonction f_1 et d'après le théorème de Montel elle est normale. La partie S_1 de S composée des fonctions $f \in S$ telles que

$$|f'(a)| \geqslant |f_1'(a)| > 0 \tag{3}$$

en un point fixé $a \in D$, est compacte en soi. En effet, d'après le corollaire du théorème 4 du numéro précédent, la limite d'une suite de fonctions $(f_n) \in S_1$ convergente sur tout $K \Subset D$ ne peut être qu'une fonction univalente (et appartenir alors à S_1) ou une constante, cas qui est exclu par l'inégalité (3).

Considérons la fonctionnelle $J(f) = |f'(a)|$ sur S_1. D'après le numéro précédent, elle est continue et par suite il existe une fonction $f_0 \in S_1$ qui en réalise le maximum, i.e. une fonction telle que

$$|f'(a)| \leqslant |f_0'(a)| \tag{4}$$

pour tout $f \in S_1$.

c) La fonction f_0 réalise une application conforme du domaine D dans le disque unité U, puisqu'elle appartient à S_1. Montrons que

$f_0(a) = 0$: dans le cas contraire il existerait dans S_1 une fonction

$$g(z) = \frac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)}\, f_0(z)}$$

pour laquelle $|g'(a)| = \frac{1}{1 - |f_0(a)|^2} |f_0'(a)| > |f_0'(a)|$, contrairement à la propriété extrémale (4) de f_0.

Montrons enfin que f_0 applique D dans le disque U. En effet, supposons que f_0 ne prend pas dans D de valeur $b \in U$; $b \neq 0$, puisque $f_0(a) = 0$. La fonction f_0 ne prend pas la valeur $b^* = \frac{1}{\bar{b}}$ dans D (car $|b^*| > 1$) donc, d'après le théorème de la monodromie on peut définir dans D une détermination de la racine

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}, \tag{5}$$

appartenant à S (l'univalence de cette détermination s'établit exactement comme dans a), quant à l'inégalité $|\psi(z)| \leqslant 1$, elle est évidente). Mais alors S contient aussi la fonction

$$h(z) = \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\, \psi(z)}$$

telle que $|h'(a)| = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} |f_0'(a)|$. Or $1 + |b| > 2\sqrt{|b|}$, car $|b| < 1$, i.e. $h \in S_1$ et $|h'(a)| > |f_0'(a)|$ contrairement à la propriété extrémale de la fonction f_0. ◀

Du théorème de Riemann il résulte que *des domaines D_1 et D_2 simplement connexes dont les frontières sont composées de plus d'un point sont isomorphes.* En effet, d'après ce qui a été démontré, il existe des isomorphismes conformes $f_j : D_j \to U$ $(j = 1, 2)$ de ces domaines sur le disque unité, et $f = f_2^{-1} \circ f_1$ sera un isomorphisme de D_1 sur D_2. Le théorème 3 du n° 38 nous dit que cet isomorphisme $f : D_1 \to D_2$ est défini de façon unique par les conditions de normalisation

$$f(z_0) = w_0, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta, \tag{6}$$

où $z_0 \in D_1$, $w_0 \in D_2$ et θ est un réel.

Nous fermerons ce paragraphe par une rapide biographie de Bernhard Riemann, le fondateur de la théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe. Comme Euler, il naît dans la famille d'un pasteur de province. Il commence très tôt à s'intéresser aux mathématiques, mais à l'âge de 20 ans sur les instances de son père il étudie la philosophie et la théologie à l'Université de Göttingen et suit simultanément des cours de mathématiques. Sa passion pour les mathématiques prend le dessus et au printemps suivant de 1847 il

passe à l'Université de Berlin qui dispensait plus de cours. En 1849 il retourne à Göttingen et pendant trois semestres il assiste à des cours de sciences naturelles et de philosophie et participe au séminaire de physique et de mathématiques de Weber.

En 1851 Riemann présente à la faculté de philosophie de Göttingen sa thèse de doctorat *Bases de la théorie générale des fonctions d'une variable complexe* qui constitue le premier jalon dans le développement de cette science. Il décrit tout d'abord le rapport des différentielles des variables $w = u + iv$ et $z = x + iy$ sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] \mathrm{e}^{-2i\varphi},$$

où $\mathrm{d}z = \varepsilon\, \mathrm{e}^{i\varphi}$, et énonce rigoureusement la définition fondamentale : « Une variable complexe w s'appelle fonction d'une autre variable complexe z si elle varie avec elle de telle sorte que la valeur du rapport différentiel $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ ne dépende pas des valeurs de la différentielle $\mathrm{d}z$ ». C'est donc dans les travaux de Riemann qu'apparaissent pour la première fois les dérivées formelles $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ et $\partial f/\partial \bar{z}$ et que s'éclaircit le rôle des conditions de différentiabilité complexe (conditions de Cauchy—Riemann ; cf. n° 6).

Riemann propose ensuite dans sa thèse de traiter les fonctions d'une variable complexe comme les applications d'un domaine plan sur un autre et note que de telles fonctions transforment « les parties infinitésimales du plan en parties semblables » (il n'utilise pas les « applications conformes »). A ce propos il cite de nombreuses propriétés géométriques des fonctions d'une variable complexe et notamment que ces fonctions transforment un domaine en un domaine et ne peuvent prendre des valeurs constantes sur des courbes. On voit ainsi apparaître pour la première fois le principe de conservation du domaine, le principe du maximum du module et le théorème d'unicité, principes et théorèmes qui seront énoncés avec plus de rigueur et démontrés ultérieurement.

Dans sa thèse il décrit géométriquement le processus de prolongement analytique et pour étudier les fonctions multivalentes, il introduit les surfaces à plusieurs feuillets qui seront appelées par la suite surfaces de Riemann (cf. chapitre précédent). Pour les étudier Riemann introduit pour la première fois toute une série de notions topologiques telles l'ordre de connexité, ce qui le fait considérer comme l'un des fondateurs d'une science alors à l'état embryonnaire : la topologie.

Le théorème de ce paragraphe constitue un important jalon dans le développement de la théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe. Dans la thèse de Riemann ce théorème s'énonce

comme suit : *Deux surfaces planes simplement connexes peuvent toujours être mises en correspondance de telle sorte qu'à chaque point de l'une est associé un seul point de l'autre, variant continûment avec lui, et leurs parties correspondantes sont infinitésimalement semblables ; ceci étant, on peut pour un point intérieur et un point frontière choisir arbitrairement les points correspondants ; cette relation sera alors définie pour tous les points.*

Pour démontrer ce théorème Riemann fait appel à des raisonnements liés à des notions physiques : le potentiel et l'énergie. Il établit l'existence de la fonction réalisant cette application à partir d'un fait physique évident : l'existence de l'état d'équilibre réalisant le minimum de l'énergie. Ces raisonnements furent critiqués en 1870 par Weierstrass qui indiqua qu'une fonctionnelle minorée n'atteint pas toujours son minimum dans la classe des fonctions admissibles. (Il n'existe pas par exemple de chemin différentiable de longueur minimale passant par trois points a, b et c non alignés : le minimum de la longueur est réalisé par la ligne brisée abc.) La démonstration rigoureuse produite plus haut a été donnée par Hilbert en 1901 : cette démonstration relève aussi d'un principe variationnel et de ce point de vue réhabilite l'approche de Riemann.

La thèse de 1851 qui créa une très forte impression sur les futures générations de mathématiciens n'eut aucun effet sur la situation de Riemann : il reste assistant dans le séminaire de Weber. Il obtint le grade de chargé de cours en 1854 après l'apparition de sa deuxième thèse : *Sur la représentation des fonctions par une série trigonométrique* et la lecture d'un cours expérimental *Sur les hypothèses reposant à la base de la géométrie*. Cette thèse stimula le développement de la théorie des fonctions d'une variable réelle ; dans cette thèse Riemann prouve, en particulier, l'existence de l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom. Son cours comporte les notions fondamentales de la géométrie riemannienne et l'idée d'un espace à plusieurs dimensions. Le texte de ce cours qui fut publié après sa mort en 1868 joua un très grand rôle dans le développement de la géométrie différentielle et la théorie de la relativité.

Les idées contenues dans les travaux de Riemann frappent d'autant plus l'imagination par leur profondeur et leur diversité qu'elles sont le fruit d'une activité scientifique qui couvre une période d'à peine dix ans. Le calcul du nombre de fonctions méromorphes indépendantes sur des surfaces de Riemann compactes le conduit à un résultat qui, sous une forme plus perfectionnée, est entré dans l'analyse moderne et l'algèbre sous le nom de théorème de Riemann—Roch. Riemann fut le premier à remarquer la différence entre l'équivalence topologique et l'équivalence analytique des surfaces de Riemann de fonctions algébriques, différence qui est étudiée encore aujourd'hui sous le nom de problème des modules. Riemann est l'auteur de résultats fondamentaux en théorie des fonctions ellipti-

ques (cf. plus bas n° 43), en théorie des équations différentielles. La fonction dzéta de Riemann est encore étudiée en théorie des nombres.

Les recherches de Riemann n'eurent pas de son vivant le retentissement qu'elles méritaient. En 1854 il écrivit avec fierté à son père qu'il y avait beaucoup de monde — 8 personnes (!) — à ses cours et que le cours de théorie des fonctions était suivi par 3 personnes. Il fut nommé professeur seulement en 1859. Trois ans plus tard il tomba sérieusement malade et mourut en 1866 sans avoir atteint quarante ans.

§ 13. Correspondance des frontières et principe de symétrie

41. Correspondance des frontières. Formulons sans le prouver le principe de correspondance des frontières:

Théorème (Carathéodory *)). *Soient D et D^* des domaines limités par des courbes de Jordan ∂D et ∂D^*; toute application conforme $f: D \to D^*$ peut être prolongée à ∂D en un homéomorphisme des adhérences $\overline{D}$ et $\overline{D}^*$.*

Ce théorème n'est évidemment pas valable pour tout homéomorphisme. Par exemple, l'application du disque unité U sur lui-même, définie en coordonnées polaires $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ par les équations

$$\rho = r, \quad \psi = \varphi + \frac{r}{1-r}, \tag{1}$$

est manifestement un homéomorphisme, mais elle ne se prolonge pas par continuité à ∂U.

Ce théorème est également mis en défaut pour les applications conformes sur des domaines dont les frontières ne sont pas des courbes de Jordan. Considérons par exemple l'application conforme f du disque U sur le domaine D de la figure 73 dont la frontière est composée d'une portion de la courbe $v = \sin\frac{1}{u}$ et du segment limite $\gamma = \{w: u = 0, -1 \leqslant v \leqslant 1\}$. On démontre que les images réciproques par cette application des arcs γ_n découpant dans D des domaines D_n tels que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n$ est confondue avec γ sont les arcs $\frac{\lambda_n}{\gamma_n}$ du plan z découpant dans U des domaines U_n tels que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$ est confondue avec un point frontière $e^{i\varphi}$ (fig. 73). Dans ce sens, l'image du point

*) Constantin Carathéodory (1873-1950), mathématicien allemand d'origine grecque.

$e^{i\varphi}$ par f est tout un segment γ, de sorte que f ne peut être prolongée par continuité au disque fermé $\overline{U}$.

Carathéodory a introduit les *éléments frontières* d'un domaine en les définissant comme des classes de sections de ce domaine équivalentes dans un certain sens. L'adjonction à un domaine de ses éléments frontières s'appelle compactification au sens de Carathéodory. Ce dernier a prouvé qu'une application conforme d'un domaine sur un autre établit une correspondance biunivoque et dans un certain sens continue entre les éléments frontières de ces domaines. Donc le théorème formulé ci-dessus est valable pour des domaines qui ne sont pas de Jordan si l'on utilise un compactifié au sens de Carathéodory à la place d'une adhérence ordinaire.

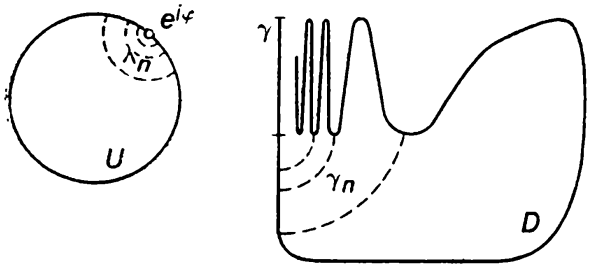

Fig. 73.

Citons sans les prouver aussi quelques résultats plus exacts sur le comportement frontière des applications conformes de domaines limités par des courbes de Jordan avec des conditions subsidiaires sur ces courbes. Soient $f: D \to D^*$ une application, ∂D et ∂D^* les frontières de D et D^*.

I (F. Riesz, M. Riesz, I. Privalov *)). Si ∂D et ∂D * sont des courbes de Jordan rectifiables, l'application f est prolongeable à ∂D en tant que fonction absolument continue de la longueur d'arc. La dérivée f' prend en presque chaque point $\zeta \in \partial D$ (pour une mesure linéaire) une valeur frontière angulaire **) $f'(\zeta)$ finie et non nulle, et pour tout ensemble de points $e \subset \partial D$ la mesure de l'image $e^* = f(e)$ est égale à

$$\text{mes } e^* = \int_e |f'(z)| \, |d\zeta| ; \tag{2}$$

en particulier, les images des ensembles $e \subset \partial D$ de mesure nulle sont des ensembles $e^* \subset \partial D^*$ de mesure nulle.

II (Lindelöf). Si ∂D et ∂D^* sont des courbes de Jordan différentiables, $\operatorname{Arg} f'(z)$ se prolonge en une fonction continue dans $\overline{D}$, et de plus pour tout $\zeta \in \partial D$

$$\operatorname{Arg} f'(\zeta) = \theta^* - \theta, \tag{3}$$

*) Ivan Privalov (1891-1941), éminent mathématicien soviétique, spécialiste de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ce théorème figure dans sa thèse *L'intégrale de Cauchy* publiée en 1919 ; le travail des frères Riesz est antérieur d'une année, mais à l'époque il était inconnu en Russie.

**) On appelle valeur frontière angulaire d'une fonction φ en un point $\zeta \in \partial D$ où ∂D possède une tangente la valeur limite commune de φ le long de tous les chemins $\gamma \subset D$ non tangents à ∂D d'extrémités ζ.

où θ et θ^* sont les pentes des tangentes aux courbes ∂D et ∂D^* aux points ζ et $\zeta^* = f(\zeta)$.

III (Kellog). Si dans les conditions et notations du théorème précédent, les angles θ et θ^* traités de plus comme des fonctions de longueur d'arc s et s^* respectivement sur ∂D et ∂D^* vérifient la condition de Lipschitz

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| < k\,|s_1 - s_2|^\alpha,$$
$$|\theta^*(s_1^*) - \theta^*(s_2^*)| < k\,|s_1^* - s_2^*|^\alpha,$$

où k et α, $0 < \alpha \leqslant 1$, sont des constantes, alors la dérivée f' se prolonge en une fonction continue et non nulle dans $\bar{D}$ (l'application est « conforme » sur la frontière).

IV (Schwarz). Si ∂D et ∂D^* sont des courbes de Jordan analytiques *), f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\bar{D}$. Nous prouverons la proposition IV au numéro suivant. Enonçons seulement un principe réciproque plus simple de correspondance des frontières:

Théorème. *Soient $D \Subset \mathbf{C}$ et $D^* \Subset \mathbf{C}$ des domaines limités par des courbes de Jordan γ et γ^*. Si une fonction f holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$ établit une correspondance biunivoque entre γ et γ^*, elle en fait de même entre D et D^* (autrement dit, f est un isomorphisme conforme).*

▶ Soit w_0 un point arbitraire de D^*; puisque f prend sur γ uniquement des valeurs de γ^*, on a $f \neq w_0$ sur γ et, en vertu de la continuité, $f \neq w_0$ dans une bande limitrophe G du domaine D. La quantité

$$N = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\{f(z) - w_0\} \tag{4}$$

(où Arg désigne une détermination quelconque continue le long de γ et Δ_γ est l'accroissement de cette détermination le long de γ), varie de toute évidence de façon continue par une déformation homotope du chemin dans la bande G. Mais puisque la quantité (4) ne peut prendre que des valeurs entières, elle reste constante par une telle déformation.

---

*) On dit qu'un arc γ est analytique s'il peut être défini par une équation $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, où γ est une fonction analytique de la variable réelle t sur $[\alpha, \beta]$ (i.e. une fonction développable en série de $t - t_0$) au voisinage de tout point $t_0 \in [\alpha, \beta]$, et de plus $\gamma'(t) \neq 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Le théorème de Heine-Borel nous dit que la fonction γ se prolonge en une fonction holomorphe d'une variable complexe t dans un voisinage de $[\alpha, \beta]$. Donc un arc analytique est l'image holomorphe d'un segment. On appelle *courbe analytique fermée* l'image holomorphe du cercle $\{|t| = 1\}$ telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour $|t| = 1$; si en outre l'application $z = \gamma(t)$ est bijective, γ est appelée *courbe de Jordan analytique*.

L'application $f: \gamma \to \gamma^*$ est par hypothèse homéomorphe, donc

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma^*} \operatorname{Arg}(w - w_0) = 1,$$

car si γ est parcouru une fois, le vecteur $w - w_0$ tourne de 2π (fig. 74). De ce qui précède il s'ensuit que pour tout chemin $\tilde{\gamma}$ homotope à γ dans la bande G, on a

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\tilde{\gamma}} \operatorname{Arg}\{f(z) - w_0\} = 1.$$

Au domaine $\tilde{D} \Subset D$ limité par la courbe $\tilde{\gamma}$, appliquons le principe de l'argument (n° 34) qui dit que l'équation $f(z) = w_0$ possède dans $\tilde{D}$ (donc dans D, puisque la bande G ne contient pas de w_0-points) exactement une racine.

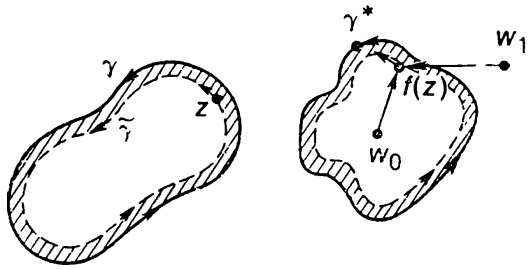

Fig. 74

On démontre de la même façon que pour tout point $w_1 \notin \bar{D}^*$ le nombre

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma^*} \operatorname{Arg}(w - w_1)$$

de zéros de la fonction $f(z) - w_1$ dans D est nul, car le vecteur $w - w_1$ ne fait aucun tour complet lorsqu'on parcourt γ^* (fig. 74). Du principe de conservation du domaine (n° 35) il s'ensuit par ailleurs que f ne peut prendre dans D des valeurs de γ^*, car elle devrait alors prendre des valeurs du complémentaire de $\bar{D}^*$.

Donc f prend une fois et une seule dans D toute valeur w_0 de D^* et n'en prend pas d'autres, autrement dit, f applique bijectivement D sur D^*. ◀

Remarque. Dans le théorème prouvé, D peut être un domaine arbitraire de $\bar{\mathbf{C}}$ (avec une frontière de Jordan), mais D^* doit être nécessairement compact dans $\mathbf{C}$, car la fonction f doit être $\mathbf{C}$-continue dans $\bar{D}$. La dernière condition est essentielle : en effet, la fonction $f(z) = z^3$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ et applique bijectivement ∂D (l'axe x) sur l'axe u, i.e. la frontière du demi-plan supérieur $D^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, mais f n'est pas bijective dans le domaine D.

Exemple. Etudions l'application du demi-plan supérieur $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ réalisée par l'intégrale elliptique de première espèce *)

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \tag{5}$$

*) Cette intégrale a été introduite en 1829 par Carl Jacobi (1804-1851), mathématicien allemand, membre *honoris causa* de l'Académie des sciences de Pétersbourg.

où k, $0 < k < 1$, est un paramètre et où l'on considère la détermination de la racine holomorphe dans D qui prend des valeurs >0 sur le segment $I = [0, 1]$ de l'axe x.

La fonction $F(z; k)$ se prolonge par continuité à $\bar{D}$ et nous allons voir comment elle transforme la frontière ∂D, i.e. l'axe x. Lorsque $z = x$ parcourt le segment $I = [0, 1]$ de gauche à droite, l'intégrale (5)

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

prend des valeurs >0 (en vertu du choix de la détermination) qu croissent de 0 à la valeur

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{6}$$

i.e. F est un homéomorphisme du segment $[0, 1]$ de l'axe x sur le segment $[0, K]$ de l'axe u.

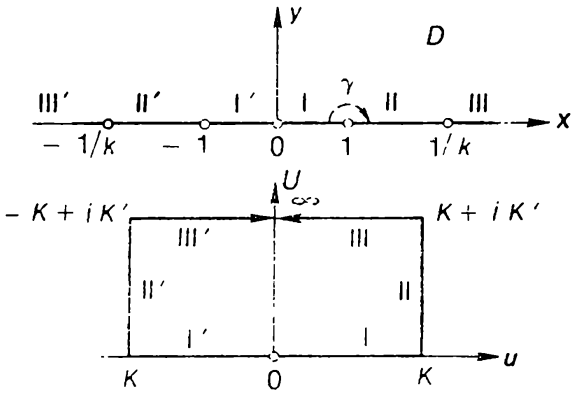

Fig. 75

A la traversée du point $z = 1$, l'un des quatre facteurs du radicande, plus exactement $1 - x$, change de signe. Puisque nous considérons une détermination qui est holomorphe dans le demi-plan supérieur D, cette traversée doit avoir lieu le long d'un petit demi-cercle $\gamma \subset D$ (représenté en pointillé sur la figure 75). Arg $(1 - z)$ varie de 0 à $-\pi$ par ce contournement, quant aux autres facteurs, ils restent invariants. Donc sur le segment $\mathrm{II} = [1, 1/k]$ de l'axe x, l'argument de la racine est égal à $-\pi/2$ et celui de l'intégrant de (5) à $\pi/2$; les valeurs de F sur le segment II peuvent donc être mises sous la forme

$$F(x, k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} =$$

$$= K + i \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

où la racine de la dernière intégrale prend encore des valeurs >0. Lorsque x parcourt le segment $\mathrm{II} = [1, 1/k]$ de l'axe x de gauche à droite, le point $F(x, k)$ décrit de bas en haut le segment $[K, K +$

$+ iK']$ du plan w, où

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{7}$$

Au passage par le point $z = 1/k$ le facteur $(1 - kx)$ du radicande change aussi de signe. On s'assure comme plus haut que la détermination considérée sur l'intervalle $\mathrm{III} = [1/k, \infty[$ de l'axe x doit avoir un argument $-\pi$, i.e. prendre des valeurs <0. Les valeurs prises par F sur cet intervalle peuvent donc être mises sous la forme

$$F(x, k) = \int_0^1 + \int_0^{1/k} + \int_{1/k}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} =$$

$$= K + iK' - \int_{1/k}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}},$$

où la racine de la dernière intégrale prend des valeurs >0. Le changement de variables $x = \frac{1}{k\xi}$ nous montre que

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)(1-\xi^2)}} = K,$$

donc la fonction F applique (homéomorphiquement) l'intervalle $[-1/k, \infty[$ sur le segment $[K + iK', iK']$ du plan w (cf. fig. 75).

On s'assure de la même façon que la fonction F réalise un homéomorphisme de l'axe négatif x sur la moitié gauche du contour du rectangle représenté sur la figure 75 (les segments I', II' et III').

En appliquant le principe de correspondance des frontières, on peut affirmer que *l'intégrale elliptique de première espèce* $F(z, k)$ *réalise une application conforme du demi-plan supérieur* D *sur le rectangle de sommets* $\pm K$, $\pm K + iK'$, *où* K *et* K' *s'expriment en fonction du paramètre* k *à l'aide des formules* (6) *et* (7).

✱ Quelle application est réalisée par (5) lorsque $k \to 0$? ✱

42. Principe de symétrie. Nous étudions ici un cas spécial de prolongement analytique se rapportant aux applications conformes. Prouvons préalablement le lemme de prolongement continu.

Lemme. *Soient* D_1 *et* D_2 *des domaines ne possédant en commun qu'une portion de frontière rectiligne* γ *), f_1 *et* f_2 *des fonctions respectivement holomorphes dans* D_1 *et* D_2 *et continues sur les ensembles* $D_1 \cup \gamma$

*) On admet que γ est un intervalle ouvert.

et $D_2 \cup \gamma$ (fig. 76). *Si*

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ pour tout } z \in \gamma, \tag{1}$$

la fonction

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{pour tout} \quad z \in D_1 \cup \gamma, \\ f_2(z) & \text{pour tout} \quad z \in D_2 \end{cases} \tag{2}$$

est holomorphe dans le domaine $D_1 \cup \gamma \cup D_2 = D$.

▶ La fonction f est continue dans D par hypothèse ; pour prouver qu'elle est holomorphe il suffit, en vertu du théorème de Morera (n° 21), de vérifier que l'intégrale de f le long du périmètre de tout triangle $\Delta \Subset D$ est nulle. Ceci résulte du théorème de Cauchy si $\Delta \Subset D_1$ ou $\Delta \Subset D_2$. Reste à traiter le cas où $\bar{\Delta} \cap \gamma \neq 0$.

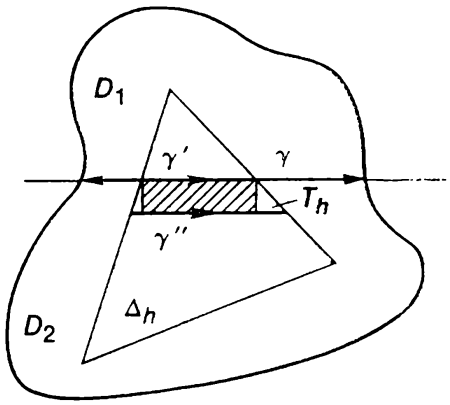

Fig. 76.

Supposons que γ partage Δ en deux parties Δ_1 et Δ_2 ; d'après les propriétés des intégrales,

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f\,dz, \tag{3}$$

et il suffit de montrer que chacune des intégrales du second membre est nulle. Considérons l'une quelconque des parties Δ_1 et Δ_2 et désignons-la pour simplifier par Δ. Soit T_h le trapèze découpé sur Δ par la droite parallèle à γ et située à une distance h de γ, et soit $\Delta_h = \Delta \setminus T_h$ (cf. fig. 76). Sans nuire à la généralité on peut admettre que γ est parallèle à l'axe réel.

Le théorème de Cauchy nous dit que l'intégrale de f le long de $\partial\Delta_h$ est nulle, donc

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial T_h} f\,dz + \int_{\partial\Delta_h} f\,dz = \int_{\partial T_h} j\,dz. \tag{4}$$

Soient γ' et γ'' les bases du trapèze T_h (on admet qu'elles sont orientées dans le même sens et que $\gamma' < \gamma''$). Puisque les côtés latéraux de T_h et la différence $\gamma'' - \gamma'$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$ et que la fonction f est bornée dans $\bar{\Delta}$, on a

$$\int_{\partial T_h} f\,dz = \int_{\gamma'} f(z)\,dz - \int_{\gamma'} j(z - ih)\,dz + O(h) =$$

$$= \int_{\gamma'} \{f(z) - f(z - ih)\}\,dz + O(h). \tag{5}$$

La fonction f étant uniformément continue dans $\bar{\Delta}$, l'intégrant de (5) tend uniformément vers 0, donc il en est de même de l'intégrale de f le long de ∂T_h lorsque $h \to 0$. Or on voit sur (4) que cette intégrale ne dépend pas de h, donc elle est nulle et il en est de même de l'intégrale de f le long de $\partial\Delta$.

Il est évident que la démonstration est plus simple si $\bar{\Delta}$ n'a qu'un sommet ou un côté en commun avec γ.

✱ Soit f une fonction holomorphe dans un disque $\{|z| < 1\}$, prolongeable par continuité à un arc γ du cercle $\{|z| = 1\}$ et nulle sur cet arc; montrer que $f \equiv 0$. ✱

La fonction f définie par la formule (2) dans le domaine D peut être traitée comme le prolongement analytique de chacune des fonctions f_1 et f_2 *). Le lemme du prolongement continu peut de ce fait s'énoncer comme suit: si deux domaines D_ν possèdent une portion rectiligne commune de frontière γ et si des fonctions f_ν holomorphes dans D sont le prolongement continu l'une de l'autre au-delà de γ, elles sont le prolongement analytique l'une de l'autre. Cette proposition n'est pas valable pour les fonctions différentiables d'une variable réelle (par exemple: D_1 et D_2 sont les intervalles $]-1, 0[$ et $]0, 1]$ et $f(x) = |x|$).

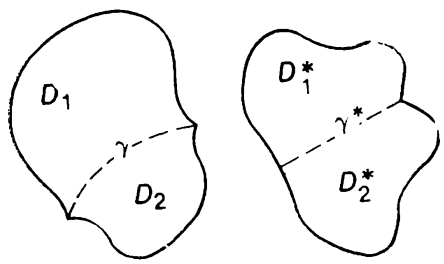

Fig. 77

Passons à la démonstration du principe de symétrie.

Théorème 1 (Riemann — Schwarz **)). *Soient D_1 et D_1^* des domaines limités par des courbes de Jordan ∂D_1 et ∂D_1^* telles que ∂D_1 soit composée d'un segment de droite ou d'un arc de cercle γ et ∂D_1^*, aussi d'un segment de droite ou d'un arc de cercle γ^*. Soient encore D_2 un domaine symétrique de D_1 par rapport à γ, D_2^* un domaine symétrique de D_1^* par rapport à γ^* et $D_1 \cap D_2 = D_1^* \cap D_2^* = \varnothing$. Si une fonction f_1 est une application conforme de D_1 sur D_1^* telle que $f_1(\gamma) = \gamma^*$, elle se prolonge analytiquement à D_2 et ce prolongement applique de façon conforme le domaine $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ sur $D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$* (fig. 77).

◀ a) Considérons d'abord le cas particulier où γ et γ^* sont des segments des axes réels. Définissons la fonction

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})} \tag{6}$$

dans le domaine D_2 symétrique de D_1 par rapport à γ.

*) Plus exactement: l'élément (D, f) est consécutif à (D_1, f_1) et à (D_2, f_2).

**) Ce principe a fait son apparition dans la thèse de Riemann en 1851 et dans une forme plus exacte, dans les travaux de Schwarz en 1869-1870.

Puisque $\bar{z} \in D_1$ si $z \in D_2$ et que la fonction f_1 est holomorphe dans D_1, il s'ensuit que la fonction $\overline{f_2(z)} = f_1(\bar{z})$ est antiholomorphe dans D_2 (cf. n° 7) et par suite $f_2(z)$ est holomorphe dans D_2. D'après le principe de correspondance des frontières, f_1 est continue dans $\bar{D}_1$ et de plus f_1 prend par hypothèse sur γ des valeurs réelles (appartenant à γ^*). Donc lorsque le point $z \in D_2$ tend vers un point $x \in \gamma$, alors $\bar{z} \to x$ et $f_2(z) \to \overline{f_1(x)} = f_1(x)$. Donc $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \gamma$ et puisque par hypothèse $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, les fonctions f_1 et f_2 satisfont aux conditions du lemme de prolongement continu. D'après ce lemme la fonction

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{dans} \quad D_1 \cup \gamma, \\ f_2(z) & \text{dans} \quad D_2 \end{cases}$$

est holomorphe dans le domaine $D_1 \cup \gamma \cup D_2$. La fonction f est par définition une application conforme de ce domaine sur $D_1^* \cup \gamma^* \cup \cup D_2^*$. Ce qui prouve le théorème pour le cas particulier où γ et γ^* sont des segments de $\mathbf{R}$.

b) Le cas général se ramène au cas particulier a) par des transformations homographiques. En effet, soient λ et λ_* des transformations homographiques respectivement de γ et γ^* dans des segments des axes réels (ces transformations existent d'après le n° 10). D'après ce qui a été prouvé dans a) la fonction $g_1 = \lambda_* \circ f_1 \circ \lambda^{-1}$ se prolonge analytiquement en une fonction g_2 au domaine $\lambda(D_2)$ symétrique de $\lambda(D_1)$ par rapport au segment $\lambda(\gamma)$ et cette fonction g_2 applique $\lambda(D_2)$ sur $\lambda_*(D_2^*)$ (on se sert du fait que les transformations homographiques laissent les points symétriques invariants, cf. n° 9). Mais dans ces conditions la fonction $f_2 = \lambda_*^{-1} \circ g_2 \circ \lambda$ est le prolongement analytique de la fonction f_1 au domaine D_2 et applique D_2 sur D_2^*. ◀

Remarque. Dans le théorème prouvé le segment γ^* peut contenir le point à l'infini; le prolongement de f sera alors méromorphe: la fonction f sera alors holomorphe partout dans D sauf au point $z_0 \in \gamma$ correspondant au point à l'infini, où elle présente un pôle. Ce pôle est nécessairement simple, car f est univalente dans le domaine D (f est multivalente au voisinage d'un pôle multiple, cf. n° 25).

Remarquons encore que si toutes les conditions du principe de symétrie sont satisfaites à l'exception de $D_1 \cap D_2 = D_1^* \cap D_2^* = \varnothing$, la construction décrite dans sa démonstration nous conduit à une fonction analytique (éventuellement multivalente) définissant une application conforme de domaines sur des surfaces de Riemann.

A titre d'exemple d'application du principe de symétrie, produisons la démonstration du théorème du prolongement qui entraîne la proposition IV du numéro précédent.

Théorème 2 (Schwarz). *Si la frontière d'un domaine D contient un arc analytique γ, toute application conforme f de ce domaine sur le disque unité peut être analytiquement prolongée à travers γ.*

◀ Pour tout $t_0 \in [\alpha, \beta]$ il existe un voisinage $U = \{t \in \mathbf{C} : |t - t_0| < r\}$ auquel $\gamma(t)$ peut être prolongée en tant que fonction holomorphe d'une variable complexe, et de plus, puisque $\gamma'(t_0) \neq 0$ (cf. définition d'un arc analytique dans la note de la page 219), on peut admettre que γ est univalente dans U. La fonction γ applique le diamètre $\delta \subset U$ composé de points de l'axe réel t sur un arc $\gamma_0 \subset \gamma$; désignons par U^+ celui des demi-disques de $U \setminus \delta$ que γ applique dans D. La fonction $g = f \circ \gamma$ vérifie dans U^+ les conditions du principe de symétrie (elle transforme δ en un arc du cercle unité) et par suite peut être analytiquement prolongée à U. Il s'ensuit de là que $f(z)$ se prolonge analytiquement à travers l'arc γ_0. ◀

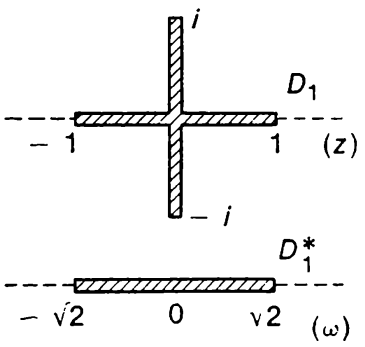

Fig. 78

Le principe de symétrie est utile pour la construction d'une application conforme de domaines jouissant de la propriété de symétrie.

Exemple. Soit D un domaine composé de l'extérieur de la réunion des segments $[-1, 1]$ et $[-i, i]$, et soit D_1 sa moitié supérieure (fig. 78). La fonction $w_1 = z^2$ est univalente dans D_1 (et pas dans D) et applique D_1 sur le plan privé de l'axe $-1 \leqslant \operatorname{Re} w_1 \leqslant \infty$. Donc la détermination convenable de la fonction $\omega = \sqrt{z^2 + 1}$ applique D_1 sur le demi-plan D_1^*. Le segment γ qui relie les points $+1$ et -1 en passant par le point à l'infini se transforme en un segment γ^* qui relie $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ par le point à l'infini. Donc la fonction ω est justiciable du principe de symétrie en vertu duquel elle se prolonge analytiquement *) à un domaine D_2 symétrique de D_1 par rapport à γ en une fonction (que l'on désignera par le même symbole) $\omega = \sqrt{z^2 + 1}$ qui applique D sur l'extérieur D^* du segment $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Il est maintenant aisé d'appliquer l'extérieur de ce segment sur un domaine canonique (par exemple, on applique D^* sur l'extérieur du segment $[-1, 1]$ à l'aide d'une fonction linéaire, puis, en envisageant une détermination de la fonction inverse de la fonction de Joukovski du n° 12, on obtient une application sur l'intérieur ou l'extérieur du disque unité).

---

*) Plus exactement, méromorphement, car au point à l'infini de D cette fonction présente un pôle (simple).

✱ 1. La fonction de Joukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ applique le demi-plan supérieur privé du demi-disque $\{|z| \leqslant 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ sur le demi-plan supérieur (cf. n° 12). Prolonger cette application au demi-plan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ tout entier; quelle est l'image de ce demi-plan?

2. Montrer que tout isomorphisme conforme d'un rectangle sur un autre qui envoie sommets dans sommets est linéaire. ✱

43. Notion de fonctions elliptiques. Commençons par un exemple. Au n° 41 on a vu que l'intégrale elliptique de première espèce

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{1}$$

où k, $0 < k < 1$, est un paramètre et où l'on envisage une détermination de la racine dans le demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, applique de façon conforme ce demi-plan sur le rectangle R_0 de sommets $\pm K$, $\pm K + iK'$. Désignons par

$$w = \operatorname{sn}(z, k) \tag{2}$$

ou plus brièvement par $w = \operatorname{sn} z$, l'inverse de l'intégrale (1). La fonction (2) qui s'appelle *sinus elliptique* est une fonction holomorphe dans le rectangle R_0 qu'elle applique de façon conforme sur le demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

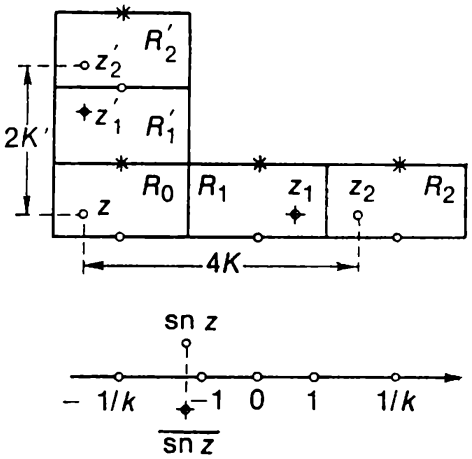

Fig. 79

Puisque la fonction sn applique le segment $[K, K + iK']$ sur le segment $[1, 1/k]$, elle est justiciable du principe de symétrie en vertu duquel elle se prolonge analytiquement à un rectangle R_1 symétrique de R_0 par rapport à $[K, K + iK']$ en une fonction (que l'on désignera encore par sn) qui applique R_1 sur le demi-plan inférieur $\{\operatorname{Im} w < 0\}$ (fig. 79). Le prolongement sn satisfait aussi au principe de symétrie en vertu duquel il se prolonge analytiquement à un rectangle R_2 symétrique de R_1 par rapport au segment $[2K, 2K + iK']$. Le rectangle R_2 s'applique lui aussi sur le demi-plan supérieur et de plus par construction

$$\operatorname{sn}(z + 4K) = \operatorname{sn} z \tag{3}$$

pour tout $z \in R_0$ (cf. fig. 79; le point z_1 symétrique du point z par rapport au segment $[K, K + iK']$ se transforme en le point $\overline{\operatorname{sn} z}$,

et le point $z_2 = z + 4K$ symétrique de z_1 par rapport à $[2K, 2K + iK']$, en le point sn z).

On prolonge exactement de la même façon la fonction sn au rectangle R_1' symétrique de R_0 par rapport au segment $[-K + iK', K + iK']$, cependant ce prolongement sera méromorphe: la fonction sn présente un pôle simple au point iK' signalé par un astérisque sur la figure 79 (cf. remarque suivant le principe de symétrie). Le prolongement sn applique R_1' sur le demi-plan inférieur et d'après le même principe de symétrie se prolonge analytiquement au rectangle R_2' symétrique de R_1' par rapport au segment $[-K + 2iK', K + 2iK']$ et applique ce rectangle de nouveau sur le demi-plan supérieur. Comme plus haut, on trouve que

$$\operatorname{sn}(z + 2iK') = \operatorname{sn} z \tag{4}$$

pour tout $z \in R_0$ (cf. fig. 79).

En raisonnant ainsi on peut prolonger sn au plan **C** tout entier. Le prolongement sera une fonction *méromorphe*: cette fonction présente des pôles simples aux points $iK' + 4Km + 2iK'n$, où m, $n = 0, \pm 1, \ldots$ sont des nombres entiers (ces points sont signalés par des astéristiques sur la figure 79) et est holomorphe en tous les autres points de **C**. Cette fonction possède une intéressante propriété: elle est *bipériodique*. On voit sur les relations (3) et (4) et sur celles qui leur sont analogues qu'elle admet deux périodes indépendantes $T_1 = 4K$ et $T_2 = 2iK'$: pour tous entiers m, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ on a la relation

$$\operatorname{sn}(z + 4Km + 2iK'n) = \operatorname{sn} z. \tag{5}$$

Au n° 33 on a parlé de la surface de Riemann du sinus elliptique.

Le sinus elliptique fait partie d'une importante classe de fonctions méromorphes bipériodiques appelées *fonctions elliptiques*. La théorie de ces fonctions qui interviennent dans une foule de problèmes d'analyse et dans les applications a été minutieusement élaborée dans les travaux classiques des mathématiciens du XIXe siècle: Gauss, Abel, Jacobi, Liouville, Weierstrass, Riemann et autres. Nous nous attarderons ici seulement sur les propriétés les plus élémentaires des fonctions de cette classe.

Montrons tout d'abord qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes possédant plus de deux périodes.

Lemme. *L'ensemble $T = \{\tau\}$ de toutes les périodes d'une fonction méromorphe non constante f est un sous-groupe discret du corps* **C** *des complexes traité comme un groupe additif.*

▶ Pour prouver que T est un sous-groupe de **C**, il suffit d'établir deux propriétés: 1° $\tau_1, \tau_2 \in T \Rightarrow \tau_1 + \tau_2 \in T$; 2° $\tau \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow -\tau \in T$. Ceci découle immédiatement de la périodicité de f: $f(z+\tau_1+\tau_2) \equiv f(z+\tau_1) \equiv f(z)$ et $f(z-\tau) \equiv f(z-\tau+\tau) \equiv f(z)$.

Dire que T est discret revient à dire qu'il n'admet pas de points d'accumulation finis. Si un tel point τ_0 existait, on pourrait exhiber une suite de périodes $\tau_n \to \tau_0$. Alors $\tau'_n = \tau_n - \tau_0$ serait une suite de périodes convergeant vers 0 et pour tout point z au voisinage duquel f est holomorphe on aurait $f(z+\tau'_n) = f(z)$, ce qui est impossible d'après le théorème d'unicité, puisque $f \neq$ const. ◀

Théorème 1. *Une fonction méromorphe $f \neq$ const ne peut avoir plus de deux périodes indépendantes.*

▶ Deux cas seulement peuvent se présenter: a) l'ensemble T de toutes les périodes de f est situé sur une droite l (passant par l'origine, puisque $T \ni 0$); b) une telle droite n'existe pas. Dans le cas a), puisque T est discret, il existe une période $\tau_0 \in T \setminus \{0\}$ de module minimal et toute période $\tau \in T$ est alors un multiple de τ_0. En effet, dans le cas contraire, il existerait une période $\tau = (n+\vartheta)\tau_0$, où n est entier et $0 < \vartheta < 1$, et alors $\tau - n\tau_0$ serait une période de module inférieur à $|\tau_0|$ ce qui contredit le choix de τ_0. La fonction f est donc périodique avec une seule période principale τ_0.

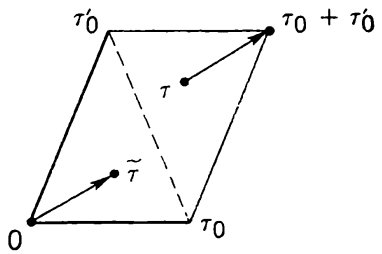

Fig. 80

Dans le cas b), puisque T est discret, il existe un triangle non dégénéré de sommets 0, τ_0, $\tau'_0 \in T$, dont l'intérieur et les côtés ne contiennent pas de périodes. Le parallélogramme de sommets 0, $\tau_0 + \tau'_0$, τ'_0 ne contient pas non plus de périodes en son intérieur et sur ses côtés (s'il contenait une telle période τ, alors $\tilde{\tau} = \tau_0 + \tau'_0 - \tau$ se trouverait à l'intérieur ou sur les côtés du triangle $0\tau_0\tau'_0$; fig. 80). Comme dans le cas a), on démontre maintenant sans peine que toute période $\tau \in T$ est de la forme $\tau = n\tau_0 + n'\tau'_0$, où n et n' sont des entiers. En effet, dans le cas contraire il existerait une période $\tau = (n+\vartheta)\tau_0 + (n'+\vartheta')\tau'_0$ avec n et n' entiers et ϑ, $\vartheta' \in [0, 1]$, l'un au moins des nombres ϑ et ϑ' étant strictement intérieur à $[0, 1[$, et alors $\vartheta\tau_0 + \vartheta'\tau'_0$ serait une période contenue à l'intérieur ou sur les côtés du parallélogramme de la figure 80 contrairement à la construction de ce dernier. Donc dans le cas b) la fonction est bipériodique et ses principales périodes dites encore générateur du groupe T sont τ_0 et τ'_0. ◀

Il est évident que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions elliptiques de mêmes générateurs τ et τ' seront des fonctions méromorphes de mêmes générateurs, donc ces fonctions en-

gendrent un corps. Puisque la périodicité

$$f(z + m\tau + n\tau') \equiv f(z) \quad (m,\ n \in \mathbf{Z}) \tag{6}$$

n'est pas violée par une dérivation par rapport à z et que la dérivée d'une fonction méromorphe est aussi méromorphe, ce corps est stable par la dérivation.

La propriété de périodicité (6) nous suggère d'étudier une fonction elliptique de générateurs τ et τ' dans le parallélogramme de sommets 0, τ, $\tau + \tau'$ et τ', appelé *parallélogramme fondamental* de f. Les valeurs de f sur le plan $\mathbf{C}$ tout entier ne font que répéter celles déjà prises sur ce parallélogramme.

Théorème 2. *Toute fonction elliptique entière est constante.*

▶ Une telle fonction est bornée dans le parallélogramme fondamental, donc partout sur $\mathbf{C}$. Le théorème de Liouville *) nous dit alors qu'elle est constante. ◀

Ainsi une fonction elliptique non constante doit présenter au moins un pôle (donc une infinité). Le nombre de pôles d'une fonction elliptique contenu dans le parallélogramme fondamental et comptés avec leurs multiplicités s'appelle *ordre* de cette fonction. Le sinus elliptique est d'ordre deux, car il possède deux pôles simples dans le rectangle fondamental.

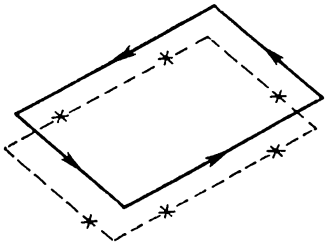

Fig. 81

Théorème 3. *La somme des résidus d'une fonction elliptique f en tous les pôles contenus dans son parallélogramme fondamental est nulle.*

▶ Supposons que la frontière $\partial\Pi$ du parallélogramme fondamental ne contient pas de pôles; si elle en contient un, on peut déplacer légèrement Π par translation de manière à satisfaire à cette condition (fig. 81). Puisque la fonction prend les mêmes valeurs aux points correspondants des côtés parallèles de Π et que ces côtés sont parcourus dans des sens opposés, l'intégrale de f le long de ces côtés est nulle, donc il en est de même de l'intégrale

$$f\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in \Pi} \operatorname*{res}_a f$$

(on a appliqué le théorème des résidus.) ◀

On en déduit qu'il n'existe pas de fonctions elliptiques du premier ordre: une telle fonction devrait présenter dans Π un pôle simple avec un résidu nul.

*) En fait, Liouville a démontré le théorème 2, quant au théorème général du n° 20 qu'on lui attribue, il l'a été par Cauchy.

Théorème 4. *Une fonction elliptique f prend dans son parallélogramme fondamental Π toute valeur $a \in \overline{\mathbf{C}}$ un nombre de fois égal à son ordre.*

▶ Supposons que la frontière du parallélogramme fondamental ne contient pas de pôles. D'après le principe de l'argument, le nombre de a-points de f diminué du nombre de pôles de f dans Π est

$$N(a) - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{f'(z)\,\mathrm{d}z}{f(z) - a}.$$

L'intégrale du second membre est nulle, puisque l'intégrant a les mêmes périodes que f (cf. démonstration du théorème précédent). Le nombre P est par définition égal à l'ordre de f. ◀

Deux fonctions elliptiques f et g ayant les mêmes générateurs τ et τ' sont reliées par une équation polynomiale

$$P(f(z),\ g(z)) \equiv 0. \tag{7}$$

Sans nous arrêter sur le détail de la démonstration de cette proposition, signalons les arguments plaidant en sa faveur . L'ensemble des points du parallélogramme fondamental Π en lesquels l'une au moins des fonctions f et g présente un pôle est fini, quant à la fonction $F(z) = Q(f(z), g(z))$, où $Q(z, w)$ est un polynôme arbitraire, elle est elliptique avec les mêmes périodes τ et τ' et ne présente des pôles qu'aux points de cet ensemble. En admettant que le degré de Q est assez grand, on peut choisir ses coefficients de telle sorte que ses parties principales s'annulent en tous ses pôles contenus dans Π : la fonction F sera alors une fonction elliptique entière et par suite égale à une constante c (en vertu du théorème 1). Reste ensuite à poser $P = Q - c$.

L'existence de la relation polynomiale (7) explique les liens des fonctions elliptiques avec l'algèbre. Puisque la dérivée f' d'une fonction elliptique est une fonction elliptique de même période, on trouve en particulier (en posant $g = f'$) qu'une telle fonction est liée par une relation polynomiale avec sa dérivée, i.e. vérifie l'équation différentielle polynomiale

$$P(w,\ w') = 0. \tag{8}$$

Ceci explique le lien des fonctions elliptiques avec les équations différentielles et les innombrables problèmes d'application.

✱ Former l'équation différentielle vérifiée par la fonction $w = \mathrm{sn}(z, k)$. ✱

44. **Fonction modulaire et théorème de Picard.** Considérons le triangle circulaire $T_0 = ABC$ formé par des arcs de cercles orthogo-

naux au cercle unité (fig. 82). D'après le théorème de Riemann, il existe une seule application conforme $w = \mu(z)$ de ce triangle sur le demi-plan supérieur associant aux sommets A, B et C respectivement les points $w = 0$, 1 et ∞. D'après le principe de symétrie la fonction μ peut être prolongée analytiquement aux triangles $T_1^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ symétriques de T_0 par rapport à ses côtés. Les points symétriques des sommets de T_0 par rapport aux côtés opposés à ces sommets sont aussi situés sur le cercle unité. (En effet, une inversion, par exemple par rapport à l'arc BC, transforme l'arc du cercle $\{|z| = 1\}$ portant le point A en l'arc complémentaire de ce cercle et l'image A_1 du point A sera située sur cet arc complémentaire.) D'après les propriétés de l'inversion (n° 9) les côtés des triangles $T_1^{(k)}$ seront encore des arcs de cercles orthogonaux au cercle unité.

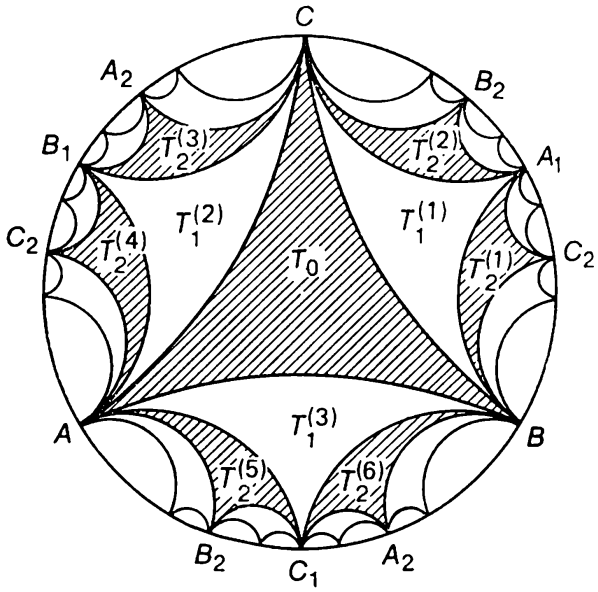

Fig. 82

Le prolongement de la fonction μ définit une application conforme de chaque $T_1^{(k)}$ sur le demi-plan inférieur telle que les côtés se transforment en l'un des segments $[0, 1]$, $[1, \infty]$, $[-\infty, 0]$. On peut donc appliquer de nouveau le principe de symétrie à la fonction μ et par conséquent μ se prolonge analytiquement aux triangles $T_2^{(k)}$ images de $T_1^{(k)}$ par une symétrie par rapport à leurs côtés (les triangles $T_2^{(k)}$ sont hachurés sur la figure 82).

En poursuivant indéfiniment cette procédure de prolongement analytique, on construit une fonction μ holomorphe dans le disque unité U appelée *fonction modulaire*. La fonction modulaire n'est pas prolongeable analytiquement à l'extérieur de U, autrement dit U est son domaine d'holomorphie. En effet, les ensembles de points images de chaque sommet du triangle T_0 par des symétries sont partout denses sur le cercle unité $\partial U = \{|z| = 1\}$; lorsque z tend le long du triangle correspondant vers le point A_n image par symétries du sommet A, alors $\mu(z) \to 0$, et lorsque z tend aussi vers B_n ou C_n (images de B et C par symétries), $\mu(z)$ tend vers 1 ou ∞. Ainsi μ ne peut être prolongée à $\bar{U}$ même par continuité.

On voit sur cette construction que la *fonction modulaire* μ *ne prend pas dans* U *les trois valeurs* 0, 1 *et* ∞. On se servira plus loin de cette propriété.

Remarquons ensuite qu'un nombre pair de symétries par rapport aux arcs de cercles (d'inversions) équivaut à une transformation homographique. Les transformations homographiques obtenues par un nombre pair de symétries décrites dans la définition de la fonction modulaire envoient le cercle ∂U dans lui-même, i.e. sont des automorphismes de U. Elles forment visiblement un groupe Λ_0 qui est un sous-groupe du groupe des automorphismes de U.

Il est aisé de voir que *la fonction modulaire est invariante par les transformations du groupe* Λ_0 (*i.e. est une fonction automorphe*). En effet, soit $\lambda \in \Lambda_0$ une transformation quelconque et soit $z \in U$ un point arbitraire; le point z appartient à un des triangles T décrit plus haut (plus exactement, à son adhérence dans U) et la fonction μ définit une application conforme de T sur le demi-plan supérieur ou inférieur qui associe aux sommets de T les points 0, 1 et ∞.

Par construction la fonction μ applique le triangle $\lambda(T)$ sur le même demi-plan, les points homologues ayant de nouveau pour images les points 0, 1 et ∞. Donc μ et $\mu \circ \lambda$ définissent une application conforme de T sur l'un des demi-plans avec la même correspondance des trois points frontières et par conséquent

$$\mu(z) \equiv \mu \circ \lambda(z) \tag{1}$$

(cf. n° 38).

La fonction modulaire s'apparente par cette propriété aux fonctions elliptiques. En effet, une fonction elliptique de générateurs τ et τ' est invariante par le groupe Γ des mouvements du plan $\mathbf{C}$, i.e. par les transformations de la forme

$$z \to z + m\tau + n\tau' \quad (m,\ n \in \mathbf{Z}). \tag{2}$$

Le sous-groupe $\Gamma \subset \operatorname{Aut} \mathbf{C}$ est discret, i.e. pour tout point $z \in \mathbf{C}$ l'orbite $\{g(z) : g \in \Gamma\}$ ne possède pas de points d'accumulation dans $\mathbf{C}$. De façon analogue, le groupe $\Lambda_0 \subset \operatorname{Aut} U$ correspondant à la fonction modulaire est discret dans le disque unité (pour tout point $z \in U$ l'orbite $\{\lambda(z) : \lambda \in \Lambda_0\}$ possède des points d'accumulation uniquement sur le cercle ∂U).

Les fonctions méromorphes dans un domaine qui sont invariantes par un groupe discret de transformations homographiques de ce domaine s'appellent fonctions *automorphes*. Les fonctions elliptiques et la fonction modulaire sont des fonctions automorphes. Les bases de l'élégante théorie de ces fonctions furent jetées par H. Poincaré dans ses travaux de 1880 à 1884. Comme le note Poincaré, ces travaux lui ont été inspirés par le désir de construire une théorie analogue à celle des fonctions elliptiques en envisageant à la place des mouvements du plan euclidien $\mathbf{C}$ (laissant les fonctions elliptiques invariantes) des mouvements dans le plan de Lobatchevski (cf. n° 11). La fonction modulaire μ décrite plus haut a été introduite par Schwarz en 1873.

✱ Remplacer le triangle circulaire T_0 de la figure 82 par un triangle équilatéral ordinaire, considérer l'application conforme de ce triangle sur le demi-plan supérieur qui associe aux sommets les points 0, 1 et ∞ et construire l'analogue euclidien de la fonction modulaire. Montrer que cette application est prolongeable en une fonction g méromorphe dans $\mathbf{C}$ qui est le cube d'une autre fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$, soit $g = h^3$. ✱

Décrivons la fonction analytique inverse de la fonction modulaire. Pour construire cette fonction considérons sa détermination $z = \mu^{-1}(w)$ holomorphe dans le demi-plan supérieur et appliquant ce demi-plan sur le triangle T_0. D'après le principe de symétrie, cette détermination se prolonge analytiquement au demi-plan inférieur à travers chacun des intervalles (ouverts) $]0, 1[$, $]1, \infty[$ et $]-\infty, 0[$. Chaque prolongement peut à son tour être prolongé au demi-plan supérieur à travers n'importe lequel de ces intervalles. Ceci étant, si le deuxième prolongement se fait à travers un intervalle différent du premier, la détermination obtenue est différente de la détermination de départ (elle applique le demi-plan supérieur sur l'un des triangles $T_2^{(k)}$). Ce processus qui peut se poursuivre indéfiniment définit la fonction analytique inverse de la fonction modulaire.

Il est aisé de voir que *la fonction analytique inverse de la fonction modulaire est infinivalente*; *que les points* 0, 1 *et* ∞ *sont des points de branchement logarithmiques*; *et enfin que toutes ses valeurs sont situées dans le disque unité* U.

L'existence de l'inverse de la fonction modulaire suggère une démonstration simple du théorème suivant qui est une profonde généralisation de la propriété fondamentale des polynômes.

Théorème 1 (Picard*)). *Toute fonction entière non constante prend toutes les valeurs complexes (finies) sauf peut-être une.*

▶ Supposons qu'une fonction entière f ne prend pas deux valeurs distinctes a, $b \in \mathbf{C}$. La fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

est aussi une fonction entière et ne prend pas les valeurs 0 et 1. Au voisinage d'un point arbitraire $z_0 \in \mathbf{C}$ la fonction holomorphe $\varphi = \mu^{-1} \circ g$, où μ^{-1} est une détermination quelconque de l'inverse de la fonction modulaire, est holomorphe au voisinage du point $w_0 = g(z_0)$. Puisque la fonction g ne prend pas les valeurs 0, 1 et ∞ qui sont singulières pour la fonction analytique μ^{-1}, la fonction φ

*) Emile Picard (1856—1941), mathématicien français; il a démontré les théorèmes cités en 1879.

est prolongeable le long de tout chemin $\gamma \subset \mathbf{C}$. Puisque $\mathbf{C}$ est simplement connexe, le théorème de la monodromie (n° 28) nous dit que la fonction φ est univalente et holomorphe dans $\mathbf{C}$, i.e. est une fonction entière. Or toutes les valeurs prises par μ^{-1} appartiennent au disque unité, donc φ est bornée et d'après le théorème de Liouville (n° 20), constante. Donc il en est de même de g et, partant, de f. ◀

Une fonction entière est une fonction méromorphe (dans $\mathbf{C}$) ne prenant pas la valeur ∞. Le théorème de Picard se généralise à des fonctions méromorphes arbitraires:

Théorème 2 (Picard). *Toute fonction méromorphe dans* $\mathbf{C}$ *et non constante prend toutes les valeurs de* $\overline{\mathbf{C}}$ *sauf peut-être deux.*

▶ Soit f une fonction méromorphe ne prenant pas trois valeurs distinctes $a, b, c \in \overline{\mathbf{C}}$. On peut considérer que ces valeurs sont finies, car si l'une d'elles était infinie, la fonction f serait une fonction entière ne prenant pas deux valeurs distinctes, i.e. une fonction constante d'après le théorème 1. Considérons la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c};$$

cette fonction est visiblement entière (car $f \neq c$) et ne prend pas les valeurs $\frac{1}{a-c}$ et $\frac{1}{b-c}$. D'après le théorème 1 elle est constante, donc f aussi. ◀

Remarque. La fonction entière e^z ne prend pas la valeur 0 et la fonction méromorphe $\operatorname{tg} z$, les valeurs $\pm i$, donc les théorèmes de Picard ne peuvent être renforcés quant aux nombres de valeurs non prises (de telles valeurs sont dites *exceptionnelles*).

On démontre que la propriété des fonctions méromorphes de prendre toutes les valeurs sauf peut-être deux est en fait une propriété locale de leur comportement à l'infini. On a le grand théorème de Picard qui dit que toute fonction prend dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point d'accumulation de ses pôles toutes les valeurs sauf peut-être deux. De façon analogue, dans tout voisinage d'un point singulier essentiel, toute fonction prend toutes les valeurs finies sauf peut-être une. Sous cette forme le grand théorème de Picard renforce considérablement le théorème de Sohotsky.

Exercices

1. Trouver le nombre de racines de l'équation $z^6 + 6z + 10 = 0$ contenues dans chaque quadrant du plan $\mathbf{C}$.

2. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque unité U et continue au voisinage de ∂U. Montrer que pour tout nombre A

tel que $|A| > \max f$, le nombre de A-points dans le disque U est égal au nombre ∂U de pôles.

3. a) Trouver le rayon de convergence de la série (10) de la fonction inverse de la fonction entière $w = ze^{-az}$ au voisinage du point $w = 0$ de l'exemple du n° 35.

b) Expliquer pourquoi cette série possède un rayon de convergence fini.

c) Déduire de b) la formule asymptotique de $n!$

4. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $U = \{|z| < 1\}$ et s'annulant aux points $a_1, \ldots, a_n$ de U et en eux seuls. Montrer que si $|f(z)| \leqslant M$ dans U, alors $|f(z)| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\right|$.

5. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes dans un domaine fermé $\overline{D}$. Montrer que la fonction $\varphi(z) = |f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)|$ atteint son maximum sur ∂D.

6. a) Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité U, continue dans $\overline{U}$ et telle que $|f(z)| \leqslant M_1$ sur le demi-cercle supérieur $\gamma_1 = \{|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ et $|f(z)| \leqslant M_2$ sur le demi-cercle inférieur, M_1 et M_2 étant des constantes. Montrer que $|f(0)| \leqslant \sqrt{M_1 M_2}$. [N o t a : envisager la fonction $g(z) = f(z) f(-z)$.]

b) Soit f une fonction holomorphe dans le carré $Q = \{-1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ et continue dans $\overline{Q}$ et telle que $|f(z)| \leqslant M_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$ respectivement sur les quatre côtés de Q. Montrer que $|f(0)| \leqslant \sqrt[4]{M_1 M_2 M_3 M_4}$.

7. Démontrer l'analogue suivant du lemme de Schwarz pour la bande $D = \{|\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$: si $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ dans D, alors $|f(z)| \leqslant |\operatorname{tg} z|$ et de plus si l'égalité est réalisée en un point quelconque $z \neq 0$, elle l'est partout dans D.

8. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le disque unité U telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| < M$ dans U. Montrer que $|f(z| - 1| \leqslant M|z|$ dans le disque $\{|z| \leqslant 1/M\}$.

9. Montrer que toute application holomorphe d'un disque fermé $\overline{U}$ sur lui-même possède un point fixe. Citer un exemple d'application dont tous les points fixes sont sutués sur la frontière du disque U.

10. Montrer que si f est une fonction holomorphe dans le disque unité U, continue dans $\overline{U}$ et telle que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial U$, alors f est une fonction rationnelle.

11. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité U, continue dans $\overline{U}$ et dont les valeurs frontières sont en même temps valeurs frontières d'une fonction antiholomorphe dans U. Montrer que f est une fonction rationnelle.

12. (N. Tchébotarev.) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur $V = \{\operatorname{Im} z > 0\}$; continue dans $\overline{V} \cap \mathbf{C}$ et telle

que $f(V) \subset V$ et $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$. Montrer que f est une fonction linéaire. [N o t a : f est entière en vertu du principe de symétrie ; montrer qu'elle est strictement croissante sur l'axe x, puis envisager la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z - x_0}$ où x_0 est le seul zéro de f et montrer que $g = \text{const.}$]

13. Supposons qu'une ligne de niveau $\gamma = \{|f(z)| = c\}$ est une courbe de Jordan différentiable et soit f une fonction holomorphe dans l'adhérence $\bar{D}$ du domaine D limité par γ. Montrer que a) $\operatorname{Arg} f$ varie de façon monotone lorsqu'on parcourt γ ; b) le nombre de zéros de f contenus dans D est supérieur de 1 à celui des zéros de la dérivée f' (compte tenu de la multiplicité). [N o t a : se servir de l'exercice 7 du chapitre I et du principe de l'argument.]

14. Soient f_ν des fonctions holomorphes, non nulles et de modules $\leqslant 1$ dans le disque U. Montrer que si $f_\nu(0) \to 0$, alors $f_\nu(z) \to 0$ uniformément dans tout disque inclus dans U.

15. Montrer que la couronne circulaire $\{r_1 < |z| < r_2\}$ peut être appliquée de façon conforme uniquement sur une couronne semblable $\{\rho_1 < |w| < \rho_2\}$ [N o t a : appliquer le principe de symétrie.]

16. Citer un exemple d'application holomorphe (mais évidemment non univalente) d'une couronne circulaire sur un cercle et un exemple d'une application analogue d'un disque sur une couronne.

17. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions holomorphes dans un domaine D est localement uniformément bornée dans D et converge sur un ensemble E ayant un point d'accumulation dans D, elle est localement uniformément convergente dans D.

18. Vérifier que la fonction $w = \operatorname{sn}(z, k)$ définit une application bijective conforme du rectangle $\{-2K < \operatorname{Re} z < 2K,\ -K' < \operatorname{Im} z < K'\}$ dont les côtés opposés sont identifiés sur la surface obtenue en prenant deux exemplaires du plan w munis des coupures $[-1/k, -1]$, $[1, 1/k]$ et en collant en croix les lèvres de ces coupures.

19. Montrer que l'identité $e^{f_1(z)} + e^{f_2(z)} \equiv 1$, où f_1 et f_2 sont des fonctions entières, est impossible si ces fonctions ne sont pas constantes.

20. Montrer que si trois fonctions entières f_j, $j = 1, 2, 3$, vérifient l'identité $e^{f_1} + e^{f_2} + e^{f_3} = 0$, l'une au moins des différences $f_j - f_k$, $j \neq k$, est constante. (Cette proposition qui est connue sous le nom de théorème de Borel est vraie pour tout nombre j de fonctions entières.)

21. Montrer que la fonction entière $f(z) = ze^z$ ne possède pas de valeurs exceptionnelles.

CHAPITRE V

MÉTHODES ANALYTIQUES

Dans ce dernier chapitre nous développons les principales notions et méthodes utilisées en analyse et dans les applications pour étudier les propriétés des fonctions et les calculer approximativement.

§ 14. Développements des fonctions entières et méromorphes

45. Théorème de Mittag-Leffler. Au n° 25 on a montré que toute fonction rationnelle se décompose en une somme d'un polynôme (qui est la partie principale de cette fonction à l'infini) et de parties principales aux points singuliers finis. On se propose ici de trouver un développement analogue pour les fonctions méromorphes. Par a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on désignera les pôles *) d'une fonction méromorphe f et par

$$g_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{c_{-\nu}^{(n)}}{(z-a_n)^\nu} \tag{1}$$

la partie principale du développement de Laurent de f au pôle a_n.

Si une fonction méromorphe f ne possède qu'un nombre fini de pôles, en soustrayant de cette fonction f la somme de ses parties principales en ces pôles, on obtient de toute évidence une fonction entière h. Dans ce cas le problème posé se résout de façon triviale: la fonction f se décompose en une somme d'une fonction entière h et des parties principales de f. Donc seul le cas d'un nombre infini de pôles est intéressant. Au lieu d'une somme finie on a alors affaire à une série de parties principales dont il faut discuter la convergence. D'une façon générale, cette série diverge, donc pour obtenir une série convergente vers les parties principales, il faut introduire

*) On rappelle que l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe ne peut être qu'au plus dénombrable: chaque disque $\{|z| < N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, ne peut contenir qu'un nombre fini de pôles, sinon il existerait un point d'accumulation fini qui serait un point singulier non isolé et non un pôle.

des corrections qui, nous le verrons, peuvent être prises sous forme de polynômes, plus exactement, des tranches des développements de Taylor des parties principales.

Avant de passer aux énoncés et démonstrations convenons de ce qu'on entendra par convergence d'une série de fonctions méromorphes susceptibles de prendre une valeur infinie en certains points.

Définition. On dit qu'une série de fonctions méromorphes est *convergente* (resp. *uniformément convergente*) sur un ensemble M si seul un nombre fini de ses termes possèdent des pôles dans M et si la série obtenue en supprimant ces termes est convergente (resp. uniformément convergente) sur M.

La réponse au problème de développement est fournie par le théorème suivant d'existence d'une fonction méromorphe dont les pôles et les parties principales sont donnés.

Théorème 1 (Mittag-Leffler *)). *Pour toute suite de points $a_n \in \mathbf{C}$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ et toute suite de fonctions g_n de la forme* (1), *il existe une fonction méromorphe f dont les points a_n et eux seuls sont des pôles et dont la partie principale est confondue avec g_n en chaque pôle a_n.*

▶ Sans nuire à la généralité on peut admettre que $a_n \neq 0$ (car au lieu de f on peut alors envisager la fonction $f - g_0$, où g_0 est la partie principale de f en $z = 0$) et que les points a_n sont classés dans l'ordre de croissance de leurs modules: $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Fixons un nombre q, $0 < q < 1$, et soit $K_n = \{z: |z| < q\,|a_n|\}$. Puisque la fonction g_n est holomorphe dans le disque $U = \{|z| < |a_n|\}$ et que $K_n \Subset U$, on peut approcher g_n uniformément sur K_n par un polynôme de Taylor

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k; \tag{2}$$

choisissons le degré m_n de telle sorte que pour tout $z \in K_n$ l'on ait

$$|g_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Avec un tel choix de P_n la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n) = f$ converge uniformément sur tout compact K de $\mathbf{C}$ au sens de la définition 1. En effet, pour tout K il existe un entier N tel que $K \subset K_n$ pour tout

*) Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), mathématicien suédois, élève de Weierstrass et ami de S. Kovalevskaya. Il fut élu membre correspondant de l'Académie des sciences de Pétersbourg en 1896 et membre honoraire de l'Académie des sciences d'U.R.S.S. en 1925. Il publia ce théorème en 1877.

$n \geqslant N$; les termes de la série

$$f_N = \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - P_n) \tag{4}$$

sont holomorphes sur K et en vertu de (3) cette série est majorée sur K par une progression géométrique convergente. Donc la série (4) converge uniformément sur K et sa somme f_N est holomorphe dans K_N en vertu du théorème de Weierstrass (n° 23).

La fonction f diffère de f_N de la fonction rationnelle $\sum_{n=1}^{N-1} (g_n - P_n)$ de pôles a_n et de parties principales g_n $(n = 1, \ldots, N-1)$ et présente dans K les pôles et parties principales donnés. Puisque K est un compact arbitraire, f est méromorphe et possède dans $\mathbf{C}$ les pôles et parties principales donnés. ◀

Corollaire. *Toute fonction méromorphe f peut être développée en une série*

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n) \tag{5}$$

uniformément convergente sur tout compact, où h est une fonction entière, g_n, les parties principales de f, et P_n, des polynômes.

▶ Rangeons les pôles de f dans l'ordre de croissance de leurs modules (on peut considérer le point $z = 0$ comme un point régulier si au lieu de f on envisage la fonction $f - g_0$, où g_0 est la partie principale de f en ce point) et en vertu du théorème 1 construisons la série

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n)$$

uniformément convergente sur tout compact. La fonction $f - f_0 = h$ est visiblement entière. ◀

Exemples.

1. La fonction méromorphe $1/\sin^2 z$ présente des pôles d'ordre deux aux points $a_n = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ et sa partie principale au pôle a_n est égale à $g_n = \frac{1}{(z - n\pi)^2}$. La série de parties principales

$$f_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

converge uniformément sur tout compact (au sens de la définition 1), car elle est majorée dans tout disque $\{|z| < R\}$ par la série

convergente $\sum \frac{1}{(n\pi-R)^2}$. Donc les polynômes correcteurs P_n sont superflus dans le développement (5) et il reste à trouver la fonction entière

$$h(z)=\frac{1}{\sin^2 z}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

Cette fonction est périodique et de période π, il suffit donc de l'étudier dans la bande $\{0<\operatorname{Re} z\leqslant\pi\}$. Dans cette bande $|z-n\pi|\geqslant\pi(n-1)$ pour $n=1, 2, \ldots$, donc

$$|f_0(z)|\leqslant\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{(z-n\pi)^2}+2\sum_{n=m+1}\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}$$

tend vers 0 lorsque $z\to\infty$ dans cette bande. Puisque $|\sin^2 z|=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y\to\infty$ lorsque $z\to\infty$, la fonction $h(z)\to 0$ lorsque $z\to\infty$ dans cette bande. Donc $h(z)$ est bornée dans cette bande et par suite dans $\mathbf{C}$, car périodique; d'après le théorème de Liouville elle est constante et donc nulle. Le développement de Mittag-Leffler s'écrit alors

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{6}$$

2. La fonction méromorphe cotg z présente des pôles simples aux points $a_n=n\pi$ $(n=0, \pm1, \ldots)$ et les parties principales $g_n=1/(z-n\pi)$. La série des parties principales diverge, mais il est aisé de voir qu'on peut prendre des polynômes correcteurs de degré zéro: la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{z}{(z-n\pi)\,n\pi}$$

(l'accent « prime » signifie que la sommation est omise pour $n=0$) converge uniformément sur tout compact. Reste à trouver la fonction entière h du développement (5). Ce qu'on fait comme dans l'exemple précédent. On s'assure que $h\equiv 0$.

Cependant il est plus simple d'intégrer $\frac{1}{\sin^2 z}-\frac{1}{z^2}$ le long de tout chemin reliant les points $z=0$ et z et ne passant pas par les pôles $a_n=0$. En se servant de la formule (6), on obtient le développement cherché de Mittag-Leffler

$$\operatorname{cotg} z-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right) \tag{7}$$

(l'intégration terme à terme de (6) est licite en raison de la convergence uniforme).

Le théorème de Mittag-Leffler et son corollaire sont des théorèmes d'existence et ne fournissent aucune indication sur la façon dont il faut choisir les polynômes P_n et la fonction entière h. Le théorème suivant qui est moins général mais plus constructif et dont la démonstration fait appel à la méthode de Cauchy d'amélioration de la convergence est plus utile pour les besoins pratiques.

Théorème 2. *Si sur une famille de cercles* $\gamma_n = \{|z| = r_n\}$, $r_1 < r_2 < \ldots, r_n \to \infty$, *une foncion méromorphe* f *croît moins vite que* z^m, *i.e. existe une constante* A *telle que pour tout* $z \in \gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$|f(z)| \leqslant A\,|z|^m, \tag{8}$$

dans le développement (5) *on peut prendre pour* P_n *et* h *des polynômes de degré* $\leqslant m$.

▶ Fixons un point $z \in \mathbf{C}$ distinct des pôles de f et supposons que z est contenu à l'intérieur de γ_N. La fonction $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe partout à l'intérieur de γ_N sauf en $\zeta = z$ et aux pôles de la fonction f. Son résidu en z est égal à $f(z)$. Désignons par s la somme des résidus de f aux pôles compris à l'intérieur de γ_N.

Pour calculer s on remarquera qu'en chacun de ces pôles le résidu de F sera confondu avec celui de $F_N(\zeta) = \varphi_N(\zeta)/(\zeta - z)$, où $\varphi_N(\zeta) = \sum_{(\gamma_N)} g_n(\zeta)$ désigne la somme de toutes les parties principales de f aux pôles intérieurs à γ_N. La fonction F_N est rationnelle et en plus des pôles indiqués, elle en possède un au point $\zeta = z$ et son résidu y est égal à $\varphi_N(z)$. Au point à l'infini son résidu est nul, car elle y présente un zéro d'ordre $\geqslant 2$ *). D'après le théorème de la somme totale des résidus (n° 26), la somme des résidus de F_N est nulle, i.e. $s + \varphi_N(z) = 0$, d'où $s = -\varphi_N(z) = -\sum_{(\gamma_N)} g_n(z)$.

En appliquant le théorème des résidus à F, on trouve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) - \sum_{(\gamma_N)} g_n(z). \tag{9}$$

Si l'intégrale du premier membre tendait vers 0 lorsque $N \to \infty$, la série des parties principales de f convergerait et les polynômes correcteurs seraient superflus. Mais ceci n'est pas le cas en général et pour obtenir une intégrale convergeant vers 0, il faut sous le signe

*) Si, évidemment, γ_N contient au moins un pôle de f en son intérieur.

d'intégration soustraire de $1/(\zeta - z)$ les premiers termes de son développement de Laurent à l'infini, i.e. la somme des termes de la forme z^k/ζ^{k+1}. Conduisons cette opération de la manière suivante: posons $z = 0$ dans l'égalité (9) et dans celles qui s'en déduisent par dérivation successive par rapport à z (on admet que $z = 0$ est un point régulier de f); nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(\gamma_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Multiplions cette égalité par z^k et soustrayons la somme des égalités obtenues de (9):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \left(\frac{1}{\zeta - n} - \sum_{0=k}^{m} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}\right) f(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= f(z) - h(z) - \sum_{(\gamma_N)} \{g_n(z) - P_n(z)\}, \qquad (10)$$

où $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$, $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$. On obtient ce qu'on voulait; en effet, estimons le second membre de (10), i.e. la quantité

$$R_N(z) = \frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^m}\,\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

(nous avons sommé la progression géométrique sous le signe d'intégration). En utilisant les inégalités (8), nous obtenons la majoration $|R_N(z)| \leqslant \frac{A|z|^{m+1}}{r_N - |z|}$, d'où il s'ensuit que $R_N(z) \to 0$ lorsque $N \to \infty$ et ce de façon uniforme sur tout compact. ◀

Exemple. Il est aisé de voir que cotg z est bornée sur les cercles $\left\{|z| = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}$, $n = 0, 1, \ldots$, donc on peut appliquer le théorème 2 (dans lequel on peut poser $m = 0$) à la fonction $f(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{1}{z}$. Nous obtenons de nouveau le développement (7).

En conclusion, généralisons le théorème de Mittag-Leffler au cas d'un domaine arbitraire $D \subset \overline{\mathbf{C}}$. Sans perdre en généralité on admettra que D contient le point à l'infini (on peut toujours réaliser ceci par une transformation homographique) et que $\partial D \neq \varnothing$, i.e. que $D \neq \overline{\mathbf{C}}$ (dans ce cas le théorème est trivial).

Théorème 3. *Pour toute suite de points $a_n \in D$ ne possédant pas de points d'accumulation dans D et toute suite de fonctions g_n de la forme* (1), *il existe une fonction f méromorphe dans D dont les points a_n et eux seuls sont des pôles et dont la partie principale en chaque pôle a_n est confondue avec g_n.*

▶ Le théorème est trivial dans le cas d'un nombre fini de points a_n, donc la suite (a_n) doit être infinie. Pour chaque a_n trouvons le point α_n de ∂D le plus proche de a_n (ce point existe, car la fonction continue $\rho(\zeta) = |\zeta - a_n|$ atteint son minimum sur le compact ∂D) : il est évident que $r_n = |a_n - \alpha_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $z \in \{|z - \alpha_n| > r_n\}$ la quantité $(z - a_n)^{-1}$ peut être développée en une progression géométrique convergente

$$\frac{1}{z-a_n} = \frac{1}{z-\alpha_n-(a_n-\alpha_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n-\alpha_n)^k}{(z-\alpha_n)^{k+1}},$$

d'où il s'ensuit que pour $|z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ la fonction $(z - a_n)^{-1}$, donc la fonction $g_n(z)$, peuvent être approchées avec n'importe quelle précision par un polynôme de la variable $(z - \alpha_n)^{-1}$. Choisissons les polynômes $P_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right) = Q_n(z)$ de telle sorte que pour $z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ l'on ait

$$|g_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

(Q_n sont des fonctions rationnelles holomorphes dans D).

Pour ce choix de Q_n la série

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - Q_n) \tag{12}$$

converge uniformément (au sens de la définition 1) sur chaque $K \Subset D$. En effet, pour chacun de ces K il existe un nombre N tel que $|z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in K$. La série de fonctions holomorphes sur K

$$f_N = \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - Q_n)$$

est majorée sur K par une progression géométrique convergente, donc la fonction f_N est holomorphe sur K. La fonction f diffère de f_N de la fonction rationnelle $\sum_{n=1}^{N-1} (g_n - Q_n)$ dont les seuls pôles dans D sont a_n et les parties principales, g_n $(n = 1, \ldots, N - 1)$ *).

*) Les points α_n en lesquels cette fonction rationnelle présente aussi des pôles n'appartiennent pas à D.

La fonction f satisfait aux conditions du théorème, puisque K est un compact arbitraire de D. ◀

Remarque. Soient données une suite de points $a_n \in \overline{\mathbf{C}}$ et une suite de fonctions correspondantes g_n de la forme (1) (si un $a_n = \infty$, la fonction correspondante g_n est un polynôme en z sans terme constant). Soit E l'ensemble des points d'accumulation de la suite (a_n) (il est aisé de voir que E est fermé). Si dans la démonstration du théorème 3 on choisit pour α_n le point de E le plus proche de a_n, la série (12) définit une fonction f méromorphe dans le complémentaire de E (qui est un ensemble ouvert et par conséquent est composé d'un ensemble de domaines au plus dénombrable).

46. Théorème de Weierstrass. De même que pour les polynômes on se propose ici de développer les fonctions entières en facteurs correspondant à leurs zéros, soit

$$P(z) = az^m \prod_{n=1}^{l} (z - a_n) = Az^m \prod_{n=1}^{l} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \tag{1}$$

(par a_n on désigne les racines non nulles, chacune d'elles étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité; par m, la multiplicité de la racine $z = 0$).

Les fonctions entières possèdent en général un ensemble infini (dénombrable) de zéros, donc au lieu du produit fini (1), il faudra envisager des produits infinis. Rappelons les définitions et faits élémentaires relatifs à ces produits. On dit qu'un produit infini à termes complexes

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) \tag{2}$$

est *convergent* si ses facteurs sont tous non nuls et les produits partiels $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k)$ possèdent des limites $\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_n$ non nulles aussi*); le nombre Π s'appelle *valeur* du produit (2).

Puisque $1 + c_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}$, la condition $c_n \to 0$ est nécessaire à la convergence du produit (1); elle n'est visiblement pas suffisante: exemple $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Pour que le produit (2) converge, il est

*) La condition $\Pi \neq 0$ est introduite pour préserver la propriété des produits de s'annuler dans le cas seulement où l'un des facteurs est nul.

nécessaire et suffisant que converge la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1+c_n), \tag{3}$$

où les valeurs des logarithmes sont convenablement choisies. En effet, supposons que la série (3) converge, i.e. que les sommes partielles $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ln (1 + c_k)$ tendent vers une limite finie Σ ; les produits partiels $\Pi_n = e^{\Sigma_n}$ tendent alors vers la limite $\Pi = e^{\Sigma} \neq 0$, i.e. le produit (2) converge. Supposons que (2) converge, i.e. $\lim_{n\to\infty} \Pi_n = \Pi \neq 0$; choisissons les valeurs des logarithmes $\ln \Pi_n$ telles que $\ln \Pi_n \to \ln \Pi$, et posons $\ln (1 + c_1) = \ln \Pi_1$; choisissons la valeur de $\ln (1 + c_2)$ telle que $\ln (1 + c_1) + \ln (1 + c_2) = \ln \Pi_2$, et ainsi de suite (en supposant que les valeurs de $\ln (1 + c_k)$, $k = 1, \ldots, n - 1$, ont déjà été choisies, prenons $\ln (1 + c_n)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \ln (1 + c_k) = \ln \Pi_n$). Pour un tel choix des valeurs des logarithmes on a $\Sigma_n = \ln \Pi_n \to \ln \Pi$, i.e. la série (3) converge.

Enfin, on dira qu'un produit infini de fonctions holomorphes sur un ensemble M est *convergent* sur M si après suppression d'un nombre fini de fonctions nulles sur M ce produit converge sur M.

Le théorème suivant d'existence de fonctions entières à zéros donnés est fondamental pour la suite.

Théorème 1 (Weierstrass *)). *Pour toute suite de points $a_n \in \mathbf{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, il existe une fonction entière f qui présente des zéros en tous les points a_n et en eux seuls, l'ordre du zéro de f en a_n étant égal au nombre de termes de la suite égaux à a_n.*

▶ Sans perdre en généralité on peut admettre que $a_n \neq 0$ (car au lieu de f on peut envisager la fonction entière $\frac{f(z)}{z^m}$ où m est l'ordre du zéro de f en $z = 0$) et que les points a_n sont rangés dans l'ordre de croissance de leurs modules.

La convergence du produit infini de facteurs $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ est, comme nous l'avons vu, équivalente à celle de la série des logarithmes de ces facteurs :

$$\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \ldots - \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k - \ldots$$

*) Ce théorème a été publié en 1876, un an avant celui de Mittag-Leffler.

Or cette série diverge dans le cas général, car $a_n \to 0$ pas assez vite; pour assurer la convergence, il faut de toute évidence essayer de supprimer les premiers termes du développement dans lesquels $1/a_n$ figure avec des puissances petites. En d'autres termes, au lieu de $\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ il faut envisager les fonctions

$$\ln g_n(z) = \ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} = \\ = -\sum_{k=p_n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k, \quad (4)$$

où p_n sont des entiers naturels convenablement choisis.

Matérialisons cette idée générale. Pour cela fixons un nombre q, $0<q<1$, et soit $K_n = \{|z| \leqslant q\,|a_n|\}$. Pour $z \in K_n$ est définie une détermination de $\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ (on supposera que c'est la détermination principale, i.e. celle pour laquelle $\ln 1 = 0$), donc la fonction $\ln g_n$ dans la formule (4). Pour de tels z on a la majoration

$$|\ln g_n(z)| \leqslant \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p_k+k+1} \leqslant \frac{1}{1-q}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \quad (5)$$

(on s'est servi des inégalités évidentes $p_k+k+1 \geqslant 1$ et on a sommé la progression géométrique).

Choisissons maintenant les nombres naturels p_n tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n+1} \quad (6)$$

converge absolument et uniformément dans tout disque $\{|z| \leqslant R\}$: pour cela il suffit de poser par exemple $p_n+1 = n$ (qu'on se souvienne du critère de Cauchy et du fait que $a_n \to \infty$). Pour tout compact fixe K on peut trouver un entier N tel que $K \subset K_n$ pour tout $n \geqslant N$. Alors on voit sur (5) que la série $\sum_{n=N}^{\infty}\ln g_n(z)$ converge uniformément et absolument sur K, donc il en est de même du produit

$$\prod_{n=N}^{\infty} g_n(z) = \prod_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} = f_N(z).$$

Il est évident que la fonction $f_N = e^{\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_a}$ est holomorphe et non nulle dans K. Donc le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}, \tag{7}$$

qui diffère de f_N d'un nombre fini de facteurs, converge sur K et la fonction f est holomorphe dans K et ne s'annule qu'aux points a_n appartenant à K et en eux seuls.

Puïsque K est un compact arbitraire, la fonction f est entière et ses zéros sont les points a_n. ◀

Corollaire. *Toute fonction entière f peut être développée en un produit infini correspondant à ses zéros:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}, \tag{8}$$

où m est l'ordre du zéro de f au point $z = 0$, g une fonction entière et les nombres p_n sont choisis de telle sorte que la série (6) *converge absolument et uniformément sur tout compact.*

▶ Admettons que $m = 0$ (pour cela il suffit d'envisager à la place de f la fonction $f(z)/z^m$) et rangeons les zéros de f dans l'ordre de croissance de leurs modules en écrivant chaque zéro un nombre de fois égal à sa multiplicité. Utilisons ces zéros pour construire, grâce au théorème 1, la fonction entière

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}.$$

Le rapport f/f_0 est visiblement une fonction entière sans zéros, donc la fonction $g(z) = \ln \frac{f(z)}{f_0(z)}$ peut être indéfiniment prolongée dans $\mathbf{C}$ et d'après le théorème de la monodromie (n° 28) est une fonction entière. Donc $f = e^g f_0$. ◀

Exemples.

1. La fonction entière $\frac{\sin z}{z}$ possède des zéros simples aux points $a_n = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). La série $\sum (z/n)^2$ étant uniformément convergente sur tout compact, on peut poser tous les $p_n = 1$ et le développement de Weierstrass s'écrit

$$\frac{\sin z}{z} = e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)},$$

où g est une fonction entière (l'accent « prime » signifie qu'il faut omettre l'indice $n = 0$). Il reste à trouver g. Pour cela le mieux est d'intégrer le développement de $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ obtenu dans le numéro précédent. On trouve alors $g = 0$ et le développement s'écrit en définitive *)

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{9}$$

(dans la deuxième forme d'écriture du développement on a regroupé les facteurs d'indice n et $-n$, ce qui est licite en vertu de la convergence absolue de la série correspondante).

2. La fonction entière $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ possède des zéros simples aux points $a_n = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, \ldots$). Il est évident qu'on peut poser tous les $p_n = 0$ et le développement de Weierstrass devient

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right). \tag{10}$$

La fonction entière $g \equiv 0$; on s'en assure le plus aisément en substituant $\sqrt{z}$ à z dans le deuxième développement (9).

Généralisons maintenant le théorème de Weierstrass au cas d'un domaine quelconque D. On peut sans nuire à la généralité admettre que D contient le point à l'infini et que $\partial D \neq \varnothing$.

Théorème 2. *Pour toute suite de points $a_n \in D$ ne possédant pas de points d'accumulation dans D, il existe une fonction f holomorphe dans D qui présente des zéros en tous les points a_n et en eux seuls* **).

▶ Supposons que la suite (a_n) est infinie. Pour chaque point a_n trouvons le point $\alpha_n \in \partial D$ le plus proche de a_n; la quantité $r_n = |a_n - \alpha_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $z \in \{|z - \alpha_n| > r_n\}$ on a le développement

$$\ln \frac{z - a_n}{z - \alpha_n} = \ln\left(1 - \frac{a_n - \alpha_n}{z - \alpha_n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k(z - \alpha_n)^k},$$

qui converge uniformément en z pour $|z - \alpha_n| > 2r_n$.

---

*) Ce développement a été obtenu par Euler en 1734-1735 sous la forme $\sin \pi z = \pi z\,(1 - z/1)\,(1 + z/1)\,(1 - z/2)\,(1 + z/2)\ldots$

**) L'ordre du zéro de f en a_n est égal au nombre de termes de cette suite égaux à a_n.

Donc pour $|z-\alpha_n| > 2r_n$ on peut choisir un entier naturel p_n tel que l'on ait

$$\left|\ln\frac{z-a_n}{z-\alpha_n}+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(a_n-\alpha_n)^k}{k(z-\alpha_n)^k}\right|<\frac{1}{2^n}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

Pour un tel choix de p_n le produit infini

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-a_n}{z-\alpha_n}\right)e^{\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(a_n-\alpha_n)^k}{k(z-\alpha_n)^k}} \tag{12}$$

converge sur chaque $K \Subset D$. En effet, pour un tel K il existe un entier N tel que $|z-\alpha_n| > 2r_n$ pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in K$. La série de fonctions holomorphes sur K

$$g_N(z)=\sum_{n=N}^{\infty}\left(\ln\frac{z-a_n}{z-\alpha_n}+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(a_n-\alpha_n)^k}{k(z-\alpha_n)^k}\right)$$

converge uniformément sur K en vertu de (11), donc g_N est holomorphe sur K et le produit

$$f_N(z)=\prod_{n=N}^{\infty}\left(\frac{z-a_n}{z-\alpha_n}\right)e^{\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(a_n-\alpha_n)^k}{k(z-\alpha_n)^k}}=e^{g_N(z)}$$

est holomorphe et non nul sur K. Donc la fonction f définie par le produit (12) est holomorphe sur K et ne s'y annule qu'aux points $a_n \in K$. La fonction f satisfait aux conditions du théorème, puisque K est un compact arbitraire. ◀

Remarque. Si l'on admet que le domaine D contient le point $z=0$ qui n'est pas un zéro de la fonction f cherchée, on peut écrire la formule (12) sous une forme différente. Remplaçons dans le second membre de (12) z par $\frac{1}{z}$, a_n par $\frac{1}{a_n}$ et α_n par $\frac{1}{\alpha_n}$; nous obtenons

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\frac{z}{a_k}}{1-\frac{z}{\alpha_k}}\right)e^{\sum_{k=1}^{p_n}\frac{z^k}{k}\left(\frac{\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha_n}}{1-\frac{z}{\alpha_n}}\right)^k}. \tag{13}$$

En particulier, si $D=\mathbf{C}$, il faut poser tous les $\alpha_n=\infty$ et alors (13) se transforme en la formule de Weierstrass (7).

Fermons ce paragraphe par deux importants corollaires du théorème de Weierstrass. Le premier traduit le lien existant entre fonc-

tions méromorphes et fonctions holomorphes. Plus exactement, une fonction f méromorphe dans un domaine D se représente au voisinage de tout point $a \in D$ par le rapport de deux fonctions holomorphes dans ce voisinage: $f(z) = \frac{\varphi_a(z)}{\psi_a(z)}$ (au voisinage d'un point régulier on peut prendre $\psi_a(z) \equiv 1$ et au voisinage d'un pôle $\psi_a(z) = (z-a)^p$, où p est l'ordre de ce pôle). Il se trouve qu'on peut construire une représentation globale de cette nature qui est valable dans le domaine D tout entier.

Théorème 3. *Toute fonction f méromorphe dans un domaine D peut être représentée par le rapport de deux fonctions holomorphes dans D (en particulier, si $D = \mathbf{C}$, par le rapport de deux fonctions entières).*

▶ L'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe dans un domaine D ne peut posséder de points d'accumulation dans ce domaine (il s'ensuit de là qu'il est au plus dénombrable). Soit (a_n) la suite des pôles de f dans D, chaque terme de cette suite étant répété un nombre de fois égal à la multiplicité du pôle. Construisons à l'aide du théorème 2 une fonction ψ holomorphe dans D et présentant des zéros en tous les points a_n et en eux seuls. Le produit $f \cdot \psi = \varphi$ est visiblement holomorphe dans D (chaque pôle est compensé par le zéro de ψ de la série correspondante), donc $f = \frac{\varphi}{\psi}$ est la représentation cherchée. ◀

Remarque. Il est évident que, réciproquement, le rapport de deux fonctions holomorphes dans D est une fonction méromorphe dans D. Donc les deux définitions suivantes sont équivalentes:

1) une fonction est dite méromorphe dans D si elle ne possède pas dans D de points singuliers autres que des pôles;

2) une fonction est dite méromorphe dans D si elle se représente par le rapport de deux fonctions holomorphes dans D.

Le deuxième corollaire du théorème 2 exprime le résultat annoncé au n° 27. Dans ce numéro nous avons appelé *domaine d'holomorphie* de f un domaine D dans lequel f était holomorphe et à l'extérieur duquel elle n'était prolongeable analytiquement à travers aucun point de ∂D.

Théorème 4. *Tout domaine $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ est le domaine d'holomorphie d'une fonction.*

▶ Construisons une suite de points $a_n \in D$ ne possédant pas de points d'accumulation dans D et telle que tout point de ∂D soit point d'accumulation de cette suite *). Formons en vertu du théorème 2

*) La démonstration de l'existence d'une telle suite est laissée au soin du lecteur.

une fonction f holomorphe dans D dont les zéros sont les points a_n et eux seuls (cette fonction ne sera donc pas identiquement nulle).

La fonction f ne peut être prolongée à travers aucun point de ∂D, car si elle l'était à travers un point α de ∂D, celui-ci serait un point intérieur du domaine d'holomorphie de f et comme α est un point d'accumulation des zéros de f, on aurait $f \equiv 0$ d'après le théorème d'unicité. ◀

§ 15. Croissance des fonctions entières

47. Ordre et type d'une fonction entière. Soit donnée une fonction entière f; posons

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|. \tag{1}$$

D'après le principe du maximum, $M_f(r)$ est aussi le maximum de $|f(z)|$ dans le disque $\{|z| \leqslant r\}$, donc $M_f(r)$ est une fonction strictement croissante. Si la quantité $M_f(r)$ ne croît pas plus vite qu'une puissance de r sur la suite $r_k \to \infty$, disons $M_f(r_k) \leqslant A r_k^m$, où $A = \text{const}$ et m est un entier $\geqslant 1$, alors f est un polynôme de degré $\leqslant m$. Ceci résulte des inégalités de Cauchy pour les coefficients du développement $f(z) = \sum c_n z^n$; on a

$$|c_n| \leqslant \frac{M_f(r_k)}{r_k^n} \leqslant A r_k^{m-n},$$

d'où l'on déduit en faisant $k \to \infty$ que $c_n = 0$ pour $n > m$.

Si l'on élimine ce cas comme étant trivial, pour estimer la vitesse de croissance de $M_f(r)$ il faut prendre des fonctions croissant plus vite que toute puissance de r. La notion d'ordre apparaît lors de la comparaison de $M_f(r)$ et des fonctions e^{r^μ}.

Définition 1. On dira que l'ordre d'une fonction entière f est *inférieur* à ρ (ord $f \leqslant \rho$) s'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$M_f(r) \leqslant C_1 e^{C_2 r^\rho}$$

pour tout $r \geqslant 0$. Appelons *ordre* de f la borne inférieure de ces nombres ρ:

$$\operatorname{ord} f = \inf \{\rho : \operatorname{ord} f \leqslant \rho\}. \tag{2}$$

S'il n'existe pas de tels ρ, on dira que f est d'*ordre infini*.

✱ Montrer que la dérivée d'une fonction entière est du même ordre que cette fonction. [N o t a: utiliser la formule intégrale de Cauchy pour une dérivée.] ✱

Théorème 1. *L'ordre d'une fonction entière f est donné par la formule*

$$\operatorname{ord} f = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}. \tag{3}$$

▶ Désignons le second membre de (3) par ρ. Par définition de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un r_0 tel que $\ln \ln M_f(r) \leqslant (\rho + \varepsilon) \ln r$ pour $r > r_0$, d'où $M_f(r) \leqslant e^{r^{\rho+\varepsilon}}$. Puisque $M_f(r)$ est strictement croissante, en posant $C = \max(M_f(r_0), 1)$, on trouve que $M_f(r) \leqslant Ce^{r^{\rho+\varepsilon}}$ pour tout $r \geqslant 0$, i.e. $\operatorname{ord} f \leqslant \leqslant \rho + \varepsilon$. De là on déduit, puisque ε est arbitraire, que $\operatorname{ord} f \leqslant \rho$. Si $\operatorname{ord} f < \rho$, il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{ord} f \leqslant \rho - \varepsilon$, i.e. $M_f(r) \leqslant C_1 e^{C_2 r^{\rho-\varepsilon}}$ pour tout r et des constantes C_1 et C_2. Pour tout r on aurait alors

$$\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leqslant \frac{\ln(\ln C_1 + C_2 r^{\rho-\varepsilon})}{\ln r},$$

et le second membre tendrait vers $\rho - \varepsilon$ lorsque $r \to \infty$ (le calcul s'effectue sans peine avec la règle de l'Hôpital), or ceci contredit le fait que la limite supérieure du premier membre est égale à ρ. Donc $\operatorname{ord} f = \rho$. ◀

Exemple. La formule (3) permet de calculer l'ordre des fonctions pour lesquelles $M_f(r)$ se détermine facilement. Ainsi, d'après cette formule e^{z^n}, $\sin z$, $\cos \sqrt{z}$ et e^{e^z} sont respectivement d'ordre n, 1, 1/2 et ∞.

Dans les cas plus compliqués les ordres des fonctions entières se calculent à l'aide des coefficients de leurs développements de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{4}$$

Remarquons que d'après la formule de Cauchy — Hadamard (n° 20) la fonction f est entière si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ (on peut remplacer la limite supérieure par une limite ordinaire, puisque $\sqrt[n]{|c_n|} \geqslant 0$). La vitesse à laquelle $\sqrt[n]{|c_n|}$ tend vers 0 définit précisément l'ordre de la fonction.

Théorème 2. *L'ordre d'une fonction entière est $\leqslant \rho$ si et seulement si les coefficients du développement (4) vérifient pour tout $n = 1, 2, \ldots$ la condition*

$$n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant c, \tag{5}$$

où c est une constante.

▶ a) Si ord $f \leqslant \rho$, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $M_f(r) \leqslant C_1 e^{C_2 r^\rho}$ et alors, d'après les inégalités de Cauchy, $|c_n| \leqslant C_1 e^{C_2 r^\rho - n \ln r}$, d'où

$$n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant C_1^{1/n} e^{C_2 \frac{r^\rho}{n} - \ln r + \frac{1}{\rho} \ln n}.$$

Cette inégalité est valable pour tout $r \geqslant 0$ et son second membre est indépendant de r, donc on peut calculer le minimum du second membre par rapport à r. Ce second membre présente un seul point stationnaire pour $r = r_0$, où $r_0^\rho = n/(C_2\rho)$, et croît indéfiniment lorsque $r \to 0$ et $r \to \infty$, donc il présente un minimum en r_0. En portant $r = r_0$ dans le second membre, on obtient

$$n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant C_1^{1/n} e^{\frac{1 + \ln C_2 \rho}{\rho}},$$

d'où l'on déduit de toute évidence (5).

b) Si (5) a lieu, alors $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ et la fonction f définie par (4) est entière. De (5) il s'ensuit que $|c_n| \leqslant C^n n^{-n/\rho}$ et en portant ceci dans (4), on trouve que pour tout $r \geqslant 0$ fixe

$$M_f(r) \leqslant |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cr)^n}{n^{n/\rho}} = |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{n \ln 2cr - \frac{n}{\rho} \ln n}. \qquad (6)$$

Désignons l'exposant de l'exponentielle (en remplaçant n par x) par $\varphi(x) = x \ln 2cr - \frac{x}{\rho} \ln x$. La dérivée $\varphi'(x)$ est nulle uniquement pour $x = x_0 = (2cr)^\rho/e$; la fonction $\varphi(x)$ tend vers 0 et $-\infty$ lorsque $x \to 0$ et $x \to \infty$ respectivement. Donc le maximum de φ sur l'axe positif est égal à $\varphi(x_0) = x_0/\rho = C_2 r^\rho$, où $C_2 = (2c)^\rho/e$. En remplaçant l'exposant de l'exponentielle dans (6) par cette valeur, on ne fait que renforcer l'inégalité

$$M_f(r) \leqslant |c_0| + e^{C_2 r^\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = |c_0| + e^{C_2 r^\rho}.$$

Reste à poser $C_1 = |c_0| + 1$ pour obtenir la majoration voulue $M_f(r) \leqslant C_1 e^{C_2 r^\rho}$ pour tout $r \geqslant 0$. ◀

Exemples. Le théorème prouvé permet de construire des exemples de fonctions entières de tout ordre ρ donné, $0 < \rho < \infty$: il suffit dans (4) de prendre $c_n = n^{-n/\rho}$ (alors $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ et par suite f est une fonction entière). Le même théorème nous dit qu'une fonction est d'ordre nul si ses coefficients de Taylor $c_n = e^{-n^2}$, et d'ordre infini si $c_n = (\ln n)^{-n}$.

Si l'ordre est donné, la notion de type nous donne une caractéristique plus fine de la croissance d'une fonction.

Définition 2. On dit que *le type* d'une fonction entière f d'ordre ρ, $0 < \rho < \infty$, *est inférieur* à σ et on note typ $f \leqslant \sigma$ s'il existe une constante C telle que

$$M_f(r) \leqslant C e^{\sigma r^\rho}$$

pour tout $r \geqslant 0$. La borne inférieure des nombres σ s'appelle *type* de la fonction f:

$$\operatorname{typ} f = \inf \{\sigma : \operatorname{typ} f \leqslant \sigma\}. \tag{7}$$

Si les nombres σ n'existent pas, on dit que f est de *type maximal* (ou *infini*); si typ $f = 0$, f est de *type minimal* (ou *nul*); si $0 < \operatorname{typ} f < \infty$, f est de *type moyen*.

Le type d'une fonction entière f d'ordre ρ, $0 < \rho < \infty$, se calcule à l'aide de la formule

$$\operatorname{typ} f = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}, \tag{8}$$

qui se prouve comme le théorème 1. Nous glisserons sur le calcul du type d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement de Taylor.

Exemples. La fonction $\cos \sigma z$ est du premier ordre et de type σ; la fonction $\sin \sqrt{z}/\sqrt{z}$ (vérifier qu'elle est entière!) est d'ordre 1/2 et de type 1.

✱ Montrer qu'une fonction est entière, d'ordre σ et de type maximal si les coefficients de son développement de Taylor sont $c_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n/\rho}$; d'ordre ρ et de type minimal si $c_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{n/\rho}$, d'ordre ρ et de type σ si $c_n = (e\sigma\rho/n)^{n/\rho}$. ✱

La notion d'ordre d'une fonction entière a été introduite par H. Poincaré en 1883 sous la dénomination suivante : une fonction f est de genre k si $\ln M_f(r) = O(r^{k+1})$ lorsque $r \to \infty$. La définition usuelle citée plus haut a été donnée par Borel *) en 1897.

48. Croissance et zéros. Téorème d'Hadamard. On peut exhiber des exemples de fonctions entières sans zéros croissant aussi vite que l'on veut (e^z, e^{e^z}, etc.) D'autre part, il existe une foule de propositions montrant que si une fonction entière non identiquement nulle s'annule très souvent, sa croissance sera très rapide. En d'autres termes, on peut majorer le nombre des zéros d'une fonction en-

---

*) Emile Borel (1871-1956), mathématicien français, membre de la Résistance Française pendant la Seconde Guerre mondiale.

tière à l'aide de son ordre. Exhibons quelques-unes de ces majorations.

Théorème 1 (inégalité de Jensen *)). *Si f est une fonction entière telle que $|f(0)| = 1$**), $n_f(r)$, le nombre de ses zéros dans le disque $\{|z| < r\}$, chaque zéro étant compté un nombre de fois égal à sa multiplicité, et $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, alors*

$$\int_0^r \frac{n_f(t)}{t}\,dt \leqslant \ln M_f(r). \tag{1}$$

▶ Posons $n = n_f(r)$ et soient $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de f contenus dans le disque $\{|z| < r\}$ et rangés dans l'ordre croissant de leurs modules (chaque zéro est pris un nombre de fois égal à sa multiplicité). Eliminons ces zéros sans modifier le module de f sur le cercle $\{|z| = r\}$; à cet effet, divisons f par le produit des fonctions homographiques $\frac{r(z-a_k)}{r^2-\bar{a}_k z}$, $k = 1, \ldots, n$, qui sont nulles pour $z = a_n$ et égales à 1 en module sur le cercle $\{|z| = r\}$. D'après le principe du maximum du module, pour $\{|z| < r\}$ on a

$$\left|\frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n} \frac{r(z-a_k)}{r^2-\bar{a}_k z}}\right| \leqslant M_f(r).$$

En faisant $z=0$, on obtient l'inégalité $r^n / \prod_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant M_f(r)$ que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \cdot \left|\frac{a_3}{a_2}\right|^2 \cdots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|^{n-1} \frac{r^n}{|a_n|^n} \leqslant M_f(r).$$

---

*) J. Jensen (1859-1925), mathématicien danois; l'inégalité (1) résulte de la relation qu'il a établie en 1899 pour les fonctions méromorphes

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \sum_{|a_n|<r} \ln\frac{r}{|a_k|} + \sum_{|b_k|<r} \ln\frac{r}{|b_k|},$$

où la sommation est étendue à tous les zéros a_k et aux pôles b_k de la fonction f dans le disque $\{|z| < r\}$, et $z = 0$ n'est ni un zéro ni un pôle.

**) Cette hypothèse ne restreint pas la généralité, car au lieu d'une fonction entière f présentant un zéro de multiplicité m à l'origine on peut envisager la fonction $\frac{f(z)\,m!}{z^m f^{(m)}(0)}$ qui est aussi entière, possède le même ordre que f et les mêmes zéros distincts de $z = 0$.

En prenant le logarithme de cette inégalité, on peut représenter le premier membre par l'intégrale

$$\ln\left|\frac{a_2}{a_1}\right|+2\ln\left|\frac{a_3}{a_2}\right|+\ldots+(n-1)\ln\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|+n\ln\frac{r}{|a_n|}=$$

$$=\int_{|a_1|}^{|a_2|}\frac{dt}{t}+\int_{|a_2|}^{|a_3|}\frac{2\,dt}{t}+\ldots+\int_{|a_n-1|}^{|a_n|}\frac{(n-1)\,dt}{t}+\int_{|a_n|}^{r}\frac{n\,dt}{t}=$$

$$=\int_0^r\frac{n_f(t)}{t}\,dt$$

(on a tenu compte du fait que $n_f(t)=k$ sur l'intervalle $]\,|a_k|,\ |a_{k+1}|\,[$ et que $n_f(t)=0$ sur l'intervalle $]0,\ |a_1|\,[$. Ceci nous conduit à (1). ◀

Corollaire 1. *Si f est une fonction entière telle que $|f(0)|=1$, dans les notations du théorème 1 on a pour tout r*

$$n_f(r)\leqslant \ln M_f(er). \tag{2}$$

▶ D'après l'inégalité de Jensen,

$$\int_0^{er}\frac{n_f(t)}{t}\,dt\leqslant \ln M_f(er);$$

puisque $n_f(t)\geqslant 0$, le premier membre ne peut que diminuer lorsqu'on remplace l'intervalle d'intégration $(0, er)$ par (r, er) et

$$\int_r^{er}\frac{n_f(t)}{t}\,dt\geqslant n_f(r)\int_r^{er}\frac{dt}{t}=n_f(r),$$

puisque $n_f(t)\geqslant n_f(r)$ en raison de la croissance de la fonction sur l'intervalle $]\,r,\ er\,[$. ◀

Corollaire 2. *Si f est une fonction entière d'ordre $\leqslant\rho$, $0<\rho<\infty$, et telle que $f(0)=1$, le nombre de ses zéros contenus dans le disque $\{|z|<r\}$ croît moins vite que r^ρ: il existe une constante C telle que pour tout $r\geqslant 0$*

$$n_f(r)\leqslant Cr^\rho. \tag{3}$$

▶ En vertu de (2), pour tout $r\geqslant 0$ on a $n_f(r)\leqslant \ln M_f(er)$, mais par définition de l'ordre on peut exhiber une constante C_2 telle que $M_f(r)\leqslant e^{C_2r^\rho}$ (on peut prendre $C_1=1$, car $f(0)=1$, cf. page 253). D'où $\ln M_f(er)\leqslant C_2(er)^\rho$ et en portant ceci dans la première inégalité, on obtient (3) avec une constante $C=C_2e^\rho$. ◀

Les corollaires 1 et 2 traduisent la propriété des fonctions entières signalée plus haut: si le nombre $n_f(r)$ des zéros d'une fonction

entière f croît rapidement, il en est de même de $M_f(r)$. Le théorème suivant estime la vitesse de convergence de la série des inverses des modules des zéros d'une fonction entière au moyen de l'ordre de croissance de cette fonction :

Théorème 2 (Hadamard *)). *Si f, $f(0) \neq 0$, est une fonction entière d'ordre fini ρ et $\{a_n\}$ sont ses zéros, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} \tag{4}$$

converge pour tout $\varepsilon > 0$.

▶ On peut sans nuire à la généralité admettre que $f(0) = 1$. La convergence d'une série à termes strictement positifs ne dépendant pas de l'ordre des termes, la série (4) qui peut éventuellement être divergente peut être mise sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} = \sum_{a_n \in U} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{a_n \in \Delta_k} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} \right\}, \tag{5}$$

où la première somme est étendue à tous les zéros de f contenus dans le disque $U = \{|z| < 1\}$ et les termes de la deuxième somme, aux zéros contenus dans la couronne $\Delta_k = \{2^k \leqslant |z| \leqslant 2^{k+1}\}$; certaines de ces sommes peuvent manquer. Puisque la première somme est bornée, le module de chaque zéro est $\geqslant 2^k$ dans Δ_n et le nombre de zéros est $\leqslant n_f(2^{k+1})$, on déduit de (5) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\rho+\varepsilon}} \leqslant C_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_f(2^{k+1})}{2^{k(\rho+\varepsilon)}}.$$

Mais pour les fonctions d'ordre ρ en vertu de (3) on a $n_f(2^{k+1}) \leqslant C2^{(k+1)\rho}$, donc la série du second membre est majorée par une série de termes $C2^{(k+1)\rho}2/^{k(\rho+\varepsilon)} = C2^{\rho}/2^{k\varepsilon}$, i.e. par une progression géométrique de raison $1/2^{\varepsilon} < 1$ et par suite est convergente. Donc la série (4) converge aussi pour tout $\varepsilon > 0$.◀

Ce théorème est d'une grande importance pour les développements de Weierstrass. Au n° 46 on a montré que dans le développement de Weierstrass d'une fonction entière

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} \tag{6}$$

*) Jacques Hadamard (1865-1963), mathématicien français ; il a démontré ce théorème et le suivant en 1893 (sous une forme différente, car la notion d'ordre était à l'époque assez floue).

les nombres entiers p_n pouvaient être choisis de telle sorte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z/a_n)^{p_n+1} \tag{7}$$

converge absolument et uniformément dans tout disque $\{ |z| \leqslant R \}$. Le théorème 2 permet de concrétiser cette proposition pour les fonctions d'ordre fini.

Corollaire. *Les degrés des polynômes*

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \tag{8}$$

du développement de Weierstrass (6) *d'une fonction entière d'ordre* $\rho < \infty$ *peuvent être choisis égaux à la partie entière de* ρ: $p_n = [\rho]$ *pour tout* n.

▶ La série (7) dans laquelle $p_n = [\rho]$ est majorée dans tout disque $\{ |z| < R \}$ par la série

$$R^{[\rho+]1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{[\rho]+1}}$$

qui est convergente d'après le théorème 2, puisque $[\rho] + 1 > \rho$.◀

Le théorème suivant particularise le choix de la fonction g dans le développement (6):

Théorème 3 (Hadamard). *Dans le développement de Weierstrass* (6) *d'une fonction entière d'ordre* ρ, *la fonction* g *est un polynôme de degré* $\leqslant [\rho]$.

▶ Sans nuire à la généralité on peut admettre que $f(0) = 1$ et que les zéros de f sont rangés dans l'ordre croissant de leurs modules. Fixons $R > 0$ et désignons par $N = N(R)$ l'entier naturel tel que $|a_n| \leqslant R$ pour tout $n \leqslant N$ et $|a_{N+1}| > R$. Mettons le développement (6) sous la forme $f(z) = Q_N(z) f_N(z)$, où $Q_N(z)$ est le produit des facteurs de (6) dont les zéros sont contenus dans le disque $\{ |z| < R \}$, soit

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = Q_N(z), \tag{9}$$

et $f_N(z)$ le reste de (6), soit

$$f_N(z) = e^{g(z) + \sum_{n=1}^{N} P_n(z)} \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)}.$$

D'après le corollaire du théorème 2 on admet que les degrés de tous les polynômes P_n sont égaux à $[\rho]$.

La fonction f_N est $\neq 0$ dans le disque $\{ |z| < R \}$, donc le théorème de la monodromie affirme l'existence d'une détermination holomorphe

$$g_N(z) = \ln f_N(z) =$$

$$= g(z) + \sum_{n=1}^{N} P_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z) \right\}. \qquad (10)$$

Il nous faut prouver que g est un polynôme de degré $\leqslant [\rho]$, i.e. que les coefficients c_k du développement de Taylor de cette fonction en $z = 0$ sont nuls pour $k > [\rho]$. D'après ce qui a été prouvé au n° 46, la série de (10) converge uniformément dans tout disque, donc d'après le théorème de Weierstrass du n° 23 on peut la dériver terme à terme et pour $k > [\rho]$ l'on obtient

$$c_k(N) = \frac{g_N^{(k)}(0)}{k!} = c_k - \frac{1}{k} \sum_{n=N+k}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}$$

$\Big($on a tenu compte du fait que $\deg P_n = [\rho]$ et que le coefficient de z^k dans le développement de $\ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ est égal à $\frac{-1}{k\,|a_n|^k}\Big)$. D'après le théorème 2, la série composée des $\frac{1}{|a_n|^k}$, $k > [\rho]$, est convergente, donc la somme du second membre tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. Or les coefficients c_k ne dépendent pas de N, donc pour prouver que $c_k = 0$ lorsque $k > [\rho]$, il suffit de prouver que $c_k(N) \to 0$ lorsque $N \to \infty$ à k fixe.

Il faut à cet effet se servir de la contrainte imposée à la croissance de la fonction f par la condition $\operatorname{ord} f = \rho$. Signalons que pour $|z| = 2R$ et $n \leqslant N$, on a $\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant \frac{2R}{|a_n - 1|} \geqslant 1$. En vertu de (9) on a alors $|Q_N(z)| \geqslant 1$ sur le cercle $\{|z| = 2R\}$. Donc

$$|f_N(z)| = \left| \frac{f(z)}{Q_N(z)} \right| \leqslant M_f(2R)$$

sur le cercle $\{ |z| = 2R \}$. D'après le principe du maximum du module, l'inégalité $|f_N(z)| \leqslant M_f(2r)$ est valable pour $|z| < 2R$ et dans le domaine $\{ |z| \leqslant R \}$ de définition de la fonction $g_N = \ln f_N$ on a $\operatorname{Re} g_N(z) \leqslant \ln M_f(2R)$. Par définition de l'ordre d'une fonction il s'ensuit de là que pour $|z| \leqslant R$

$$\operatorname{Re} g_N(z) \leqslant \ln C_1 + C_2 (2R)^\rho, \qquad (11)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Nous sommes contraints de nous servir ici d'inégalités analogues à celles de Cauchy pour les coefficients du développement taylorien et dans lesquelles le maximum du module de la fonction est remplacé par le maximum de sa partie réelle :

$$|c_k(N)| \leqslant \frac{2}{R^k} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{g_N(z) - g_N(0)\}.$$

Ces inégalités seront prouvées en Annexe (cf. (14), page 297). En tenant compte de (11) et du fait que $g_N(0) = \ln f_N(0) = 0$, on en déduit que

$$|c_k(N)| \leqslant \frac{2}{R^k}\{\ln C_1 + C_2(2R)^\rho\}.$$

Lorsque $R \to \infty$ il en est de même de $N = N(R)$, donc $c_k(N) \to 0$ lorsque $N \to \infty$ pour tout $k > \rho$. ◀

Les théorèmes d'Hadamard contiennent une importante information sur les développements de Weierstrass des fonctions entières d'ordre fini. Le deuxième théorème est particulièrement important : en effet, on ne sait pas comment déterminer la fonction entière g du développement (6) (on n'a démontré que son existence) et si cette fonction est d'ordre fini ρ, le théorème nous dit que ses coefficients de Taylor ne sont pas en nombre infini mais en nombre fini inférieur à ρ.

Exemple. L'ordre de la fonction entière $\frac{\sin z}{z}$ étant égal à 1, tous les polynômes P_n et la fonction g sont linéaires, donc son développement de Weierstrass est de la forme

$$\frac{\sin z}{z} = e^{az+b} \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) e^{z/(\pi n)},$$

et il reste à déterminer les seules constantes a et b. En faisant tendre z vers 0, on trouve que $b = 0$; en se servant de la parité de la fonction $\frac{\sin z}{z}$ et en remplaçant z par $-z$, on obtient $a=0$. Nous retrouvons donc le développement connu (cf. formule (9), n° 46)

$$\sin z = z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) e^{z/(\pi n)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

✱ Montrer que les fonctions entières d'ordre $\rho < \infty$ fractionnaire possèdent une infinité de zéros. ✱

§ 16. Autres théorèmes faisant intervenir la croissance

49. Principe de Phragmén — Lindelöf. Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D et continue dans $\bar{D}$, le principe du maximum (n° 37) nous dit que si $|f(z)| \leqslant M$ sur ∂D, il en sera de même sur D tout entier. Cependant cette inégalité est mise en défaut si la continuité est violée en un point au moins de ∂D. Considérons par exemple le disque $D = \{x^2 + y^2 < x\}$ et la fonction $f(z) = e^{1/z}$ holomorphe dans D. Cette fonction est continue dans $\bar{D} \setminus \{0\}$, elle a un module $|e^{\frac{1}{z}}| = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} = e$ partout sur $\partial D \setminus \{0\}$ et prend des valeurs aussi grandes que l'on veut à l'intérieur de D. Pourtant l'inégalité ci-dessus reste en vigueur si l'on exige que la fonction f ne croisse pas trop vite lorsque z se rapproche d'un point exceptionnel de la frontière. Cette proposition s'appelle *principe de Phragmén — Lindelöf* et possède d'importantes applications en analyse; énonçons-le avec plus de rigueur et prouvons-le pour certains types de domaines.

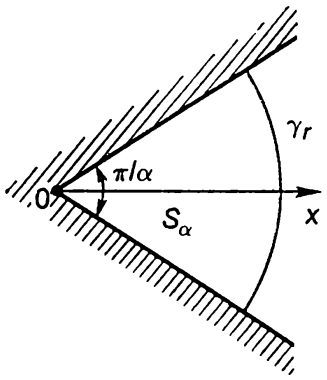

Fig. 83

Considérons tout d'abord un angle. Sans perdre en généralité on peut admettre que son sommet est à l'origine $z = 0$ et qu'il est symétrique par rapport à l'axe x, i.e. est de la forme

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbf{C} : \ |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\} \tag{1}$$

(fig. 83).

On admettra que le point à l'infini est un point exceptionnel de la frontière ∂S_α et on conviendra de caractériser la croissance de f au voisinage de ce point par l'*ordre angulaire* ρ et le *type angulaire* σ: si $M_f(r) = \max |f(z)|$ sur l'arc $\gamma_r = \{ |z| = r, z \in S_\alpha \}$, alors

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}, \qquad \sigma = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{2}$$

Théorème 1 (Phragmén — Lindelöf *)). *Soit f une fonction holomorphe dans l'angle S_α, prolongeable par continuité aux points finis de ∂S_α et telle que $|f(z)| \leqslant M$ sur ∂S_α. Si en outre l'ordre angulaire ρ de f est $< \alpha$, alors $|f(z)| \leqslant M$ partout dans S_α.*

*) Lars Edward Phragmén et Ernst Lindelöf, mathématiciens suédois, ont prouvé ce théorème en 1908.

▶ Prenons des nombres $\varepsilon > 0$ et ρ', $\rho < \rho' < \alpha$ et soit la fonction $f_\varepsilon(z) = f(z)\,e^{-\varepsilon z^{\rho'}}$, où la détermination de $e^{-\varepsilon z^{\rho'}}$ est définie par la condition $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2\alpha}$. Si l'on pose $z = re^{i\varphi}$, alors

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)|\,e^{-\varepsilon r^{\rho'}\cos\rho'\varphi},$$

donc sur ∂S_α, où $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$ et $|\rho'\varphi| = \frac{\pi\rho'}{2\alpha} < \frac{\pi}{2}$, on a $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$ et par définition de l'ordre angulaire, pour tout r de l'arc γ_r on a

$$|f_\varepsilon(z)|\ C_1 e^{r^{\rho''} - \varepsilon r^{\rho'}\cos\varphi},$$

où $\rho \leqslant \rho'' < \rho'$ et $r \geqslant r_0$. Puisque sur cet arc $\cos\rho'\varphi \geqslant \cos\frac{\pi\rho'}{2\alpha} > 0$ et $\rho < \rho'$, le second membre tend vers 0 lorsque $r \to \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc pour r assez grand $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$ sur γ_r. En appliquant le principe du maximum au secteur limité par ∂S_α et par de tels arcs, on trouve que $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$ en tout point $z \in S_\alpha$. Vu que $\varepsilon > 0$ est arbitraire, en le faisant tendre vers 0 on trouve que $|f(z)| \leqslant M$ en tout point $z \in S_\alpha$. ◀

Remarque. Plus l'angle est petit (i.e. plus α est grand), plus le principe du maximum est valable pour les fonctions à croissance rapide. L'estimation $\rho < \alpha$ est exacte dans le théorème : le principe n'est plus valable pour $\rho = \alpha$. On le voit sur l'exemple de la fonction $f(z) = e^{z^\alpha}$ holomorphe dans S_α (on envisage la détermination pour laquelle $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2\alpha}$); sur ∂S_α on a $|f(z)| = e^{r^\alpha\cos\alpha\varphi}\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2\alpha}} = 1$ et f n'est pas bornée sur S_α.

On peut néanmoins préciser ce théorème : le principe du maximum reste valable pour les fonctions d'ordre angulaire α, pourvu que l'on tienne compte du type angulaire.

Théorème 2. *Soit f une fonction holomorphe dans un angle S_α, d'ordre angulaire α et de type angulaire σ. Si en outre f est prolongeable par continuité aux points finis de ∂S_α et $|f(z)| \leqslant M$ sur ∂S_α, alors pour tout $z \in re^{i\varphi} \in S_\alpha$*

$$|f(z)| \leqslant M e^{\sigma r^\alpha \cos\alpha\varphi}. \tag{3}$$

▶ Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction $f_\varepsilon(z) = f(z)\,e^{-(\sigma+\varepsilon)z^\alpha}$, où la détermination de z^α est définie par la condition $\operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2\alpha}$. Sur les côtés de l'angle on a $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$ (cf. démonstration du théorème précédent) et sur l'axe réel, $|f_\varepsilon(x)| \leqslant C e^{\sigma' x^\alpha - (\sigma+\varepsilon)x^\alpha}$, où $\sigma' > \sigma$ et C est une constante. En choisissant $\sigma' < \sigma + \varepsilon$, on trouve que f_ε est bornée sur l'axe réel ; supposons que $|f_\varepsilon(x)| \leqslant M_\varepsilon$.

En appliquant le théorème 1 à chacun des angles

$$S'_\alpha = \left\{0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2\alpha}\right\} \quad \text{et} \quad S''_\alpha = \left\{-\frac{\pi}{2\alpha} < \operatorname{Arg} z < 0\right\}$$

(ce qui est possible puisque les angles S'_α et S''_α sont deux fois plus petits que S_α), on trouve que $|f_\varepsilon(z)|$ (dans S'_α et S''_α, donc dans S_α) est inférieur à max (M, M_ε). Donc f_ε est bornée sur S_α et puisque $|f_\varepsilon(z) \leqslant M$ sur ∂S_α, le théorème 1 nous dit que $|f_\varepsilon(z) \leqslant M$ partout dans S_α. Mais alors $|f(z)| \leqslant M\,|e^{(\sigma+\varepsilon)z^\alpha}| = Me^{(\sigma+\varepsilon)r^\alpha \cos\alpha\varphi}$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient (3).

Corollaire 1. *Si dans les conditions du théorème le type angulaire est minimal* ($\sigma = 0$), *alors* $|f(z)| \leqslant M$ *pour tout* $z \in S_\alpha$.

▶ Ceci résulte de (3) pour $\sigma = 0$.◀

Corollaire 2. *Si une fonction entière f d'ordre $\rho = 1$ et de type inférieur à σ est bornée sur l'axe réel, pour fixer les idées $f(\alpha) \leqslant M$, alors en tout point $z = x + iy \in \mathbf{C}$ on a*

$$|f(z)| \leqslant Me^{\sigma|y|}. \tag{4}$$

▶ Si $z = re^{i\varphi}$ appartient au demi-plan de droite, alors $g(z) = f(iz)$ satisfait aux conditions du théorème 2 avec $\alpha = 1$, donc

$$|f(iz)| \leqslant Me^{\sigma r \cos\varphi} \quad (-\pi/2 < \varphi < \pi/2).$$

En remplaçant z par $-iz$ (et φ par $\varphi - \pi/2$), on trouve que $|f(z)| \leqslant Me^{\sigma r \sin\varphi} = Me^{\sigma y}$ dans le demi-plan supérieur. De façon analogue, $|f(z)| \leqslant Me^{-\sigma y}$ dans le demi-plan inférieur. ◀

Corollaire 3. *Soit f une fonction entière d'ordre inférieur à 1 ou d'ordre 1 mais de type minimal. Si f est bornée sur une droite quelconque, alors $f \equiv$* const.

▶ La fonction f est bornée dans chacun des demi-plans en lesquels cette droite partage $\mathbf{C}$: si l'ordre $\rho < 1$, d'après le théorème 1, et si $\rho = 1$ mais $\sigma = 0$, d'après le corollaire 1. Donc f est bornée dans $\mathbf{C}$ et constante d'après le théorème de Liouville.◀

Il est curieux de remarquer que la fonction sinus est bornée sur l'axe réel à la limite: si la fonction entière $\sin z$ était d'ordre < 1 ou d'ordre égal à 1 mais de type minimal, elle ne pourrait plus être bornée (puisque pas constante) sur aucune droite!

Dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 le fait que la fonction e^{z^α} est bornée sur ∂S_α et non bornée dans S_α a joué un rôle fondamental. Cette propriété provient du fait que $z \to z^\alpha$ applique S_α sur le demi-plan de droite (la fonction e^z est bornée dans le demi-plan de droite). Cette remarque permet de généraliser le principe de Phragmén — Lindelöf à un domaine simplement connexe D à frontière différentiable par morceaux.

Puisque la croissance des fonctions n'est importante qu'au voisinage du point marqué $\zeta_0 \in \partial D$, il suffit de construire une fonction φ, $\varphi(\zeta_0) = \infty$ appliquant de façon conforme une partie de D adhérant à ζ_0 sur une partie adhérant au point à l'infini du secteur $\left\{ |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)} \right\}$ voisin du demi-plan de droite $(\varepsilon > 0)$, et le reste de D, sur un domaine borné. La fonction e^{φ} qui, traitée comme une fonction de la variable φ, est du premier ordre sera bornée en tous les points frontières finis du domaine $\varphi(D)$. En lui appliquant le théorème 1 dans lequel $\rho = 1$, $\alpha = 1 + \varepsilon$ et le domaine est confondu avec S_α dans un voisinage du point à l'infini, on obtient le principe de Phragmén — Lindelöf sous la forme suivante:

Théorème 3. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D à frontière ∂D différentiable par morceaux, continue partout dans $\bar{D}$ sauf en un point $\zeta_0 \in \partial D$ au voisinage duquel $|f(z)| \leqslant e^{\operatorname{Re}\varphi(z)}$, où φ est l'application conforme construite plus haut. Si $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \partial D \setminus \{\zeta_0\}$, alors $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D$.*

Par exemple, pour la demi-bande $T_\alpha = \{\operatorname{Re} z > 0, \ |\operatorname{Im} z| < \alpha\}$ on peut prendre $\varphi(z) = e^{\pi z/(2\alpha')}$, où $\alpha' > \alpha$. On constate que si f est holomorphe dans T_α, continue aux points finis et $|f(z)| \leqslant M$ en tous ces points et si de plus $|f(x + iy| < e^{e^{\pi x/(2\alpha')}}$ pour tout $x \geqslant x_0$ et $|y| < \alpha$, alors $|f(z) \leqslant M$ partout dans T_α. On voit donc de nouveau que plus la bande est étroite, plus le principe du maximum est valable pour les fonctions à croissance rapide.

50. Théorème de Kotelnikov *). Pour illustrer la théorie développée ci-dessus considérons un problème qui trouve des applications pratiques dans la construction des filtres à fréquence. Rappelons qu'une fonction f se représente par une intégrale de Fourier de la forme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega, \tag{1}$$

où $\hat{f}$ s'appelle *fonction spectrale*: ceci est l'analogue continu de la représentation d'une fonction périodique par une série de Fourier. Le lien entre cette représentation et les fonctions entières est exprimé par le

Théorème 1. *Si une fonction $\hat{f}$ non nulle uniquement sur un intervalle $]-\sigma, \sigma[\subset \mathbf{R}$ est de classe L^2 $]-\sigma, \sigma[$, i.e. est absolument inté-*

*) Vladimir Kotelnikov (né en 1908), célèbre savant soviétique, vice-président de l'Académie des sciences d'U.R.S.S.

grable sur cet intervalle, sa transformée de Fourier

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega z}\, d\omega \tag{2}$$

est une fonction entière d'ordre $\rho \leqslant 1$ *et pour* $\rho = 1$ *de type* $\leqslant \sigma$.

▶ L'holomorphie de f dans le plan tout entier résulte de la possibilité de dériver sous le signe d'intégration (ou, sinon, du théorème de Morera du n° 21). Sur l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega z}\, d\omega \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)|\, e^{|\omega||z|}\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant e^{\sigma|z|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)|\, d\omega \tag{3}$$

on voit que ord $f \leqslant 1$, et pour ord $f = 1$ que typ $f \leqslant \sigma$. ◀

Remarque. On voit sur (3) que dans les conditions du théorème précédent la fonction f est bornée sur l'axe réel lorsque $t \to 0$.

Attardons-nous maintenant sur un problème d'interpolation. Soient données une suite de points $\{a_n\} \subset \mathbf{C}$ convergeant à l'infini et une suite arbitraire de nombres complexes $\{b_n\}$; on demande de trouver une fonction entière f telle que $f(a_n) = b_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ Donnons tout d'abord une solution formelle de ce problème en supposant pour simplifier que les points a_n sont tous distincts. D'après le théorème de Weierstrass du n° 46, il existe des polynômes P_n tels que le produit infini

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)} \tag{4}$$

converge. Ce produit est une fonction entière présentant des zéros simples en tous les points a_n, donc pour n fixe la fonction $\dfrac{\varphi(z)}{\varphi'(a_n)(z-a_n)}$ qui est aussi une fonction entière, tend vers 1 lorsque $z \to a_n$ et est nulle en tous les autres points a_m $(m \neq n)$. La solution du problème posé est donnée par la série

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\varphi(z)}{\varphi'(a_n)(z-a_n)} \tag{5}$$

sous réserve bien sûr qu'elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

✱ Montrer que si $a_n = n\delta$, où δ est un nombre quelconque >0 et $|b_n| \leqslant c/n^{1+\varepsilon}$, où c et ε sont des constantes > 0, la série (5) converge pour tout z vers une fonction entière. ✱

La solution de ce problème n'est pas unique : si f_0 est une solution, $f = f_0 + h\varphi$, où h est une fonction entière arbitraire, en sera une aussi (en effet, $\varphi = 0$ en tous les points a_n). Il est aisé de voir que toute solution f de ce problème est de cette forme : la différence $f - f_0$ doit présenter des zéros du premier ordre au moins en tous les points a_n et par suite le rapport $(f - f_0)/\varphi = h$ est une fonction entière.

Le problème d'interpolation envisagé se pose sous une forme différente. On se donne les nœuds d'interpolation et on établit les conditions sous lesquelles une fonction est définie de façon unique par ses valeurs en ces nœuds.

Théorème 2 (V. Kotelnikov). *Soient donnés un nombre fixe $\sigma > 0$ et des nœuds d'interpolation $a_n = n\pi/\sigma$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. Une fonction entière f d'ordre 1 et de type $\tau < \sigma$, bornée sur l'axe réel, se restitue de façon unique par ses valeurs en ces nœuds à l'aide de la formule*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a_n) \frac{\sin \sigma (z - a_0)}{\sigma (z - a_n)}. \tag{6}$$

Avant de prouver ce théorème, on remarquera que la fonction (4) construite au moyen des nœuds $a_n = n\pi/\sigma$ est de la forme

$$\varphi(z) = z \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\sigma z}{n\pi}\right) e^{\sigma z/(n\pi)} = \frac{\sin \sigma z}{\sigma}$$

(cf. (9), n° 46). Puisque $\varphi'(a_n) = \cos n\pi = (-1)^n$ et $\sin \sigma (z - a_n) = (-1)^n \sin \sigma z$, on a

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi'(a_n)(z - a_n)} = \frac{\sin \sigma z}{\sigma (-1)^n (z - a_n)} = \frac{\sin \sigma (z - a_n)}{\sigma (z - a_n)},$$

donc la série (6) est un cas particulier de la formule d'interpolation générale (5) pour les nœuds donnés. Reste à prouver que cette série converge vers f (dont l'existence est supposée) et que cette fonction est restituée de façon unique par ses valeurs aux nœuds.

Pour les besoins de la démonstration nous devons établir une propriété de la fonction sinus.

Lemme. *Le sinus est séparé du zéro sur les cercles $\gamma_n = \{|z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\}$, i.e. il existe une constante $m > 0$ telle que pour $z = x + iy \in \gamma_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ l'on a*

$$|\sin z| \geqslant m e^{|y|}. \tag{7}$$

▶ D'après une formule identique à la formule (4) du n° 14 on a $\sin z = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$, et puisque nous avons affaire à une fonction paire en y, il suffit de la minorer pour $y \geqslant 0$. Choisissons un nombre y_0, $0 < y_0 < \pi/4$ et remarquons que pour $y \geqslant y_0$ nous avons $|\sin z| \geqslant \frac{1}{2}(e^y - e^{y_0}) \geqslant m_1 e^y$, où $m_1 > 0$ est une constante. Pour $0 < y \leqslant y_0$ sur tous les cercles γ_n on a $|\sin z| \geqslant |\sin x| \geqslant c$, où $c > 0$ est une constante (pour $y \leqslant y_0$ la valeur de x diffère peu de $\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ sur γ_n et le sinus est égal à ± 1 en ces points). On peut donc admettre qu'en ces points $|\sin z| \geqslant m_2 e^{y_0} \geqslant m_2 e^y$, où $m_2 > 0$ est une constante. En prenant $m = \min(m_1, m_2)$, on obtient (7).◀

Penchons-nous maintenant sur la démonstration du théorème 2.

▶ a) *Convergence.* Fixons N et désignons $\gamma_N = \left\{|z| = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi/\sigma\right\}$ et

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\sin \sigma\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{8}$$

D'après le théorème des résidus, pour tout z intérieur à γ_N on a

$$F_N(z) = \frac{f(z)}{\sin \sigma z} + \sum_{(\gamma_N)} \frac{f(a_n)}{\sigma \cos \sigma a_n} \cdot \frac{1}{a_n - z} =$$

$$= \frac{f(z)}{\sin \sigma z} - \sum_{(\gamma_N)} \frac{(-1)^n f(a_n)}{\sigma(z - a_n)}, \tag{9}$$

où la sommation est étendue à tous les nœuds a_n intérieurs à γ_N La fonction f satisfaisant aux conditions du corollaire 2 du numéro précédent (le type σ est remplacé par τ), on a sur γ_N

$$|f(\zeta)| \leqslant M e^{\tau |\operatorname{Im} \zeta|} = M e^{\tau r_N |\sin t|}, \tag{10}$$

où $r_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi/\sigma$ est le rayon de γ_N, $t = \operatorname{Arg} \zeta$ et M, une constante. D'après le lemme on a sur γ_N

$$|\sin \sigma\zeta| \geqslant m e^{\sigma r_N |\sin t|}. \tag{11}$$

Pour tout point $z \in \mathbf{C}$ choisissons N tel que $r_N \geqslant 2|z|$; pour $\zeta \in \gamma_N$ on aura alors $|\zeta - z| > r_N/2$ et $|d\zeta| = r_N dt$. En estimant l'intégrale de (8) à l'aide des inégalités (10) et (11), on trouve

$$|F_N(z)| \leqslant \frac{M}{\pi m} \int_0^{2\pi} e^{-(\sigma-\tau)r_N |\sin t|} dt = \frac{4M}{\pi m} \int_0^{\pi/2} e^{-(\sigma-\tau)r_N \sin t} dt$$

(on s'est servi de la symétrie de $|\sin t|$). La fonction sinus étant convexe sur $]0, \pi/2[$, on a $\sin t \geqslant 2t/\pi$, donc

$$|F_N(z)| \leqslant \frac{4M}{m\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r_N(\sigma-\tau)t}{\pi}} dt = \frac{2M}{m(\sigma-\tau)r_N}(1-e^{-(\sigma-\tau)r_N}) \qquad (12)$$

et tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. De (9) on déduit alors en faisant tendre $N \to \infty$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(a_n)(-1)^n \sin \sigma z}{\sigma(z-a_n)},$$

et puisque $(-1)^n \sin \sigma z = \sin \sigma(z-a_n)$, ceci est confondu avec (6).

b) *Unicité.* Supposons qu'à part f il existe une fonction entière g d'ordre 1 de type $\leqslant \tau$ prenant les valeurs $f(a_n)$ en a_n. D'après ce qui a été prouvé plus haut, il existe alors une fonction entière h telle que $f(z) - g(z) = h(z) \sin \sigma z$ pour tout z. Pour z fixe choisissons le cercle γ_N tel que son rayon $r_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi/\sigma > 2|z|$ et écrivons la formule intégrale de Cauchy

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)-g(\zeta)}{\sin \sigma\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

La fonction $f - g$ satisfait aux conditions du corollaire 2 du n° 49, donc pour h on peut répéter intégralement l'estimation effectuée dans a) pour F_N et qui nous a conduits à (12). Mais la fonction h ne dépend plus de N, donc en faisant tendre N vers l'infini dans cette estimation, on trouve que $h \equiv 0$, i.e. $f \equiv g$. ◀

Attardons-nous un peu sur l'interprétation du théorème 2. En radiotechnique et en téléphonie pour transmettre un signal f on se sert de la méthode de modulation des impulsions qui consiste à transmettre non pas toutes les valeurs de ce signal, mais seulement celles qui sont prises à certaines dates $x = n\delta$, où $\delta > 0$ est un intervalle fixé (ici et dans la suite la variable x est assimilée au temps). Il se pose tout naturellement la question de savoir s'il est possible de restituer de façon unique le signal transmis par ces valeurs. De la discussion du problème d'interpolation il ressort clairement que ceci est impossible dans le cas général même si f est une fonction entière.

Mais en pratique les signaux transmis passent à travers des filtres qui éliminent les hautes fréquences de leurs spectres. D'autre part, seule une bande étroite de fréquences présente un intérêt pratique : ainsi l'oreille humaine est capable de distinguer des fréquences allant jusqu'à 15 kilohertz ; pour reproduire la parole humaine il suffit d'une bande de 4 à 5 kilohertz, etc. On voit donc que pour les besoins pratiques on peut se limiter à une certaine bande de fréquences et supposer par exemple que le spectre appartient à un intervalle $[-\sigma, \sigma]$, où $\sigma > 0$ est un nombre fixe.

La décomposition du signal f en un spectre continu suivant les fréquences ω est traduite mathématiquement par l'intégrale de Fourier (1), quant au théorème 1, il affirme que si le spectre des fréquences appartient strictement à l'intervalle $[-\sigma, \sigma]$, le signal f est une fonction entière d'ordre 1 et de type $\tau < \sigma$, bornée sur l'axe réel. D'après le théorème 2, ces signaux sont restitués de façon unique par leurs valeurs aux instants $x = n\pi/\sigma$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. Par ailleurs, l'impulsion appliquée à un instant a est exprimée par la fonction de Dirac $\delta(x - a)$. Son intégrale de Fourier est de la forme

$$\delta(x-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-a)}\, d\omega$$

et si l'on limite la bande des fréquences à l'intervalle $[-\sigma, \sigma]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\omega(x-a)}\, d\omega = \text{const}\, \frac{\sin \sigma(x-a)}{\sigma(x-a)}.$$

On reconnaît ici les termes de la somme (6) aux facteurs près exprimant l'intensité des impulsions.

Remarque. La série (6) n'est pas nécessairement absolument convergente et sa somme doit être comprise comme suit

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n) \frac{\sin \sigma(z-a_n)}{\sigma(z-a_n)}.$$

La restitution univoque des signaux à spectre des fréquences contenu dans la bande $[-\sigma, \sigma]$ sur le vu des valeurs de ces signaux à des intervalles de temps discrets $a_n = n\pi/\sigma$ revêt une signification fondamentale dans la théorie et la pratique de la transmission des communications. Ce fait ainsi que la formule (6) de restitution d'un signal au vu des données transmises ont été mis en évidence par V. Kotelnikov *) en 1933.

*) Signalons que Kotelnikov ne s'est pas servi de la théorie des fonctions entières et a établi la formule (6) à partir de considérations physiques. Par ailleurs, le problème d'interpolation de fonctions entières a été envisagé antérieurement en mathématiques, mais pas dans la perspective d'applications pratiques.

§ 17. Estimations asymptotiques

On étudie des méthodes élémentaires de déduction d'expressions approchées d'intégrales dépendant d'un paramètre pour de grandes valeurs de ce dernier. Ces méthodes sont très importantes pour les applications pratiques.

51. Développements asymptotiques. Commençons par la description d'une méthode originale utilisée en 1754 par Euler pour le calcul de l'intégrale

$$f(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{z+t}. \tag{1}$$

Cette intégrale ne s'intégrant pas par des fonctions élémentaires, Euler décomposa $\frac{1}{z+t}$ en la progression géométrique $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{z^{n+1}}$ et bien que celle-ci ne converge uniformément qu'à l'intérieur de l'intervalle $]-|z|, |z|[$, il l'intégra terme à terme sur $[0, \infty]$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n!}{z^{n+1}} \tag{2}$$

(pour $n\geqslant 0$ entiers les intégrales du second membre se calculent facilement par parties; on peut se rappeler aussi que $\Gamma(n+1)=n!$ cf. n° 27).

Ce procédé est certes illicite et la violation des règles de l'analyse ne resta pas impunie: la série du troisième membre de (2) diverge pour tout z. Et pourtant le procédé d'Euler a un sens. En effet, la différence entre la valeur de l'intégrale et la somme partielle de la série (2) est

$$f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\,k!}{z^{k+1}}=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}\sum_{k=n}^{\infty}\left(-\frac{t}{z}\right)^k dt=\frac{(-1)^n}{z^n}\int_0^\infty\frac{e^{-t}t^n}{t+z}\,dt,$$

et puisque $|z+t|\geqslant|z|$ pour $\{\operatorname{Re} z>0\}$ et $t\geqslant 0$, on a

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\,k!}{z^{k+1}}\right|\leqslant\frac{1}{|z|^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt=\frac{n!}{|z|^{n+1}}$$

pour tout z tel que $\{\operatorname{Re} z>0\}$.

Pour tout n fixe et $|z|$ grand, cette différence est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport aux termes de la somme partielle (le dernier d'entre eux est d'ordre $\frac{1}{|z^n|}$). Donc les sommes partielles de la série (2) approchent bien les intégrales dans le demi-plan

$\{\mathrm{Re}\ z > 0\}$ pour $|z|$ grands, bien que cette série soit divergente. Cet exemple est le premier exemple de développement asymptotique.

Définition. Soient $M \subset \mathbf{C}$ un ensemble pour lequel le point à l'infini est un point d'accumulation, et f une fonction complexe définie sur M. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ qui est éventuellement divergente s'appelle *développement asymptotique* de la fonction f sur l'ensemble M. On note ceci

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \tag{3}$$

si pour tout $n \geqslant 0$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in M}} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \right\} = 0. \tag{4}$$

Le sens de cette définition est le suivant: pour tout n fixe, les sommes partielles de la série approchent f sur M lorsque $z \to \infty$ avec une erreur qui est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au dernier terme de la somme partielle.

Théorème. *Si une fonction f admet un développement asymptotique sur M, les coefficients de ce développement sont définis de façon unique par les formules*

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim f(z), \\ c_1 &= \lim z\{f(z) - c_0\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n &= \lim z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{z^k} \right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

où les limites sont prises pour $z \to \infty$, $z \in M$.

▶ Les formules (5) résultent directement de (4). ◀

La réciproque est visiblement fausse: les développements asymptotiques ne définissent pas des fonctions. (Par exemple, les fonctions e^{-z} et $f(z) \equiv 0$ ont sur l'axe positif les mêmes développements asymptotiques, des développements avec des coefficients nuls.)

On démontre sans peine que les développements asymptotiques peuvent être additionnés et multipliés terme à terme: si $f(z) \sim$

$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ et $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$, alors

$$f(z)+g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n+d_n}{z^n}, \quad f(z)\,g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 d_n+\ldots+c_n d_0}{z^n}.$$

Supposons que $g(z) \neq 0$ sur M; en généralisant (3) on écrira

$$f(z) \sim g(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \tag{6}$$

si $\frac{f(z)}{g(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ sur M.

Exemple. En théorie des probabilités on rencontre l'intégrale

$$\operatorname{Erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Pour obtenir son développement asymptotique intégrons par parties

$$\int_x^{\infty} e^{x^2-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_x^{\infty} \frac{1}{t}\,d\left(e^{x^2-t^2}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{x^2-t^2}\,\frac{dt}{t^2}$$

en répétant cette opération, on obtient

$$\int_x^{\infty} e^{x^2-t^2}\,dt = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n x^{2n-1}} +$$

$$+(-1)^n\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}\,dt.$$

Il est aisé de voir que le dernier terme est d'ordre inférieur à celui de $1/x^{2n}$. Donc le développement asymptotique cherché est de la forme suivante sur l'axe positif x:

$$\operatorname{Erf} x \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots\right).$$

Signalons que les développements asymptotiques sont parfois compris dans un sens encore plus large: au lieu des puissances négatives de z on prend un système arbitraire de fonctions $\varphi_n(z)$ tendant vers 0 lorsque $z \to \infty$ sur M et telles que $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$

pour tout n et on écrit

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{n} c_n \varphi_n(z) \tag{7}$$

si $f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z))$ pour tout n lorsque $z \to \infty$, $z \in M$.

Exemple. L'équation différentielle pour la fonction de Bessel d'ordre zéro est de la forme

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \tag{8}$$

La substitution $y = u/\sqrt{x}$ nous conduit à l'équation

$$u'' + u = -\frac{1}{4x^2} u.$$

En admettant que le second membre est connu, on peut se servir de la formule de Cauchy du cours d'équations différentielles qui dit que

$$u = a \cos(x - \alpha) - \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} \sin(x - t) \frac{u(t)}{t^2} \, dt,$$

où a et α sont des constantes arbitraires. On voit sur cette formule que la fonction u reste bornée lorsque $x \to \infty$ $\Big($en effet, si $M(x) = \max\limits_{t \in]x_0, x[} |u(t)|$, alors $M(x) \leqslant |a| + \frac{1}{4} M(x) \frac{1}{x_0}$, d'où $M(x) \leqslant \dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{4x_0}}\Big)$. Donc on peut prendre $x_0 = \infty$ et

$$u(x) = a \cos(x - \alpha) + \frac{1}{4} \int_{x}^{\infty} \sin(x - t) \frac{u(t)}{t^2} \, dt. \tag{9}$$

Puisque $u(x)$ est bornée, l'intégrale de (9) tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. En posant $u(x) = a \cos(x - \alpha) + u_1(x)$, on trouve que $u_1(x) = o(1)$ et pour u_1 on aura l'équation

$$u_1(x) = \frac{a}{4} \int_{x}^{\infty} \sin(x - t) \cos(t - \alpha) \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{4} \int_{x}^{\infty} \sin(x - t) \frac{u_1(t)}{t^2} \, dt. \tag{10}$$

En faisant la substitution

$$\sin(x - t) \cos(t - \alpha) = \frac{1}{2} [\sin(x - \alpha) + \sin(x - 2t + \alpha)],$$

on met en évidence une intégrale élémentaire et on remarque que les deux autres intégrales sont d'ordre $o(1/x)$; donc

$$u_1(x) = \frac{a}{8x} \sin(x-\alpha) + u_2(x),$$

où $u_2(x) = o(1/x)$. En portant ceci dans (10), on trouve par analogie

$$u_2(x) = -\frac{9a}{32x^2} \cos(x-\alpha) + o(1/x^2).$$

En poursuivant cette procédure on obtiendra des approximations de plus en plus précises.

En revenant à la variable $y = u/\sqrt{x}$, on trouve le développement asymptotique des solutions de l'équation de Bessel (8):

$$y \sim \frac{a}{\sqrt{x}} \left\{ \left(1 - \frac{3^2}{8^2 \cdot 2! x^2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8^4 \cdot 4! x^4} - \ldots\right) \cos(x-\alpha) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{8x} - \frac{3^2 \cdot 5^2}{8^3 \cdot 3! x^3} + \ldots\right) \sin(x-\alpha) \right\}. \qquad (11)$$

Pour $a = \sqrt{2/\pi}$ et $\alpha = \pi/4$ on obtient, en particulier, le développement asymptotique de la solution standard de l'équation (8): la *fonction de Bessel* $J_0(x)$.

52. Méthode de Laplace *). Cette méthode s'applique aux fonctions d'une variable réelle et donne une estimation asymptotique des intégrales de la forme

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt, \qquad (1)$$

$[a, b] \subset \mathbf{R}$, pour de grandes valeurs positives du paramètre λ. Le principe de cette méthode est élémentaire: si une fonction f présente un maximum absolu en un point t_0 de $[a, b]$, ce maximum sera plus prononcé pour les grandes valeurs de λ. Donc pour de grands λ la principale contribution à la valeur de l'intégrale provient du voisinage du point t_0, la partie restante de l'intervalle d'intégration étant insignifiante **).

Cette méthode repose sur un lemme dans lequel la fonction f est de la forme spéciale $f(t) = -t^\alpha$ et le maximum est réalisé à la borne de l'intervalle d'intégration, au point $t = 0$.

---

*) Pierre Simon Laplace (1749-1827), mathématicien français.

**) Ceci explique le succès du procédé d'Euler signalé dans le numéro précédent.

Lemme. *Soit*

$$F(\lambda) = \int_0^a \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt, \tag{2}$$

où $0 < a < \infty$, $\alpha > 0$, *et supposons que la fonction* φ *se représente sur un intervalle* $\{ |t| < 2\delta \}$ *par une série entière*

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{3}$$

et que l'intégrale converge absolument pour un $\lambda = \lambda_0$. *Alors sur l'axe positif*

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{n+1}{\alpha}}, \tag{4}$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ *est la fonction gamma.*

▶ Pour $\lambda > \lambda_0$ on a

$$\left| \int_\delta^a \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt \right| \leqslant e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta^\alpha} \int_\delta^a |\varphi(t)|\, e^{-\lambda_0 t^\alpha}\, dt = O(e^{-\lambda\delta^\alpha})$$

lorsque $\lambda \to +\infty$; donc cette partie de l'intégrale n'est pas importante pour le développement asymptotique.

Pour calculer l'intégrale sur l'intervalle $[0, \delta]$ on peut se servir de la série uniformément convergente (3) et par conséquent

$$\int_0^\delta \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\alpha} \lambda^{-\frac{k+1}{\alpha}} \int_0^{\lambda\delta^\alpha} \tau^{-\frac{k+1}{\alpha}-1} e^{-\tau}\, d\tau + o\left(\lambda^{-\frac{n+1}{\alpha}}\right) \tag{5}$$

(on a fait la substitution $\lambda t^\alpha = \tau$). Mais pour tout $\mu > 0$ et tout $\beta > 0$ fixe

$$\int_\mu^\infty t^\beta e^{-t}\, dt = e^{-\mu} \int_0^\infty (\tau+\mu)^\beta e^{-\tau}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\mu} \left\{ \int_0^\mu (2\mu)^\beta e^{-\tau}\, d\tau + \int_\mu^\infty (2\tau)^\beta e^{-\tau}\, d\tau \right\} \leqslant e^{-\mu}(A\mu^\beta + B) = o(e^{-\mu/2})$$

(nous avons fait la substitution $t = \mu + \tau$, puis nous avons remplacé les deux intégrales par des intégrales entre 0 et ∞, de sorte que A et B ne dépendent pas de μ). Donc dans (5) on peut avec la préci-

sion adoptée remplacer l'intervalle d'intégration $[0, \lambda\delta^\alpha]$ par $[0, \infty]$ et les intégrales du second membre seront égales à $\Gamma\left(\frac{(k+1)}{\alpha}\right)$.

En combinant nos observations, on trouve le résultat cherché: pour $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int_0^a \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\alpha}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+1}{\alpha}} + o\left(\lambda^{-\frac{n-1}{\alpha}}\right). \blacktriangleleft$$

Passons au cas général de l'estimation de l'intégrale (1) en supposant accessoirement que sont satisfaites les conditions suivantes:

1° l'intégrale (1) converge absolument pour un $\lambda = \lambda_0$;

2° la fonction f atteint son maximum en un point $t_0 \in [a, b]$ et en outre il existe un $h > 0$ tel que $f(t_0) - f(t) \geqslant h$ à l'extérieur d'un voisinage de t_0, i.e. sur l'ensemble $\{t \in [a, b] : |t - t_0| > \delta\}$;

3° au voisinage $\{|t - t_0| < \delta\}$ les fonctions f et φ se représentent par des séries de Taylor uniformément convergentes de centre t_0.

Montrons tout d'abord que d'après le principe général énoncé plus haut le comportement des fonctions f et φ en dehors du voisinage de t_0 n'influe pas sur le développement asymptotique de l'intégrale. Soit $t_0 > a + \delta$; en posant $f(t_0) = f_0$ pour abréger, on obtient pour $\lambda > \lambda_0$

$$\left|\int_a^{t_0-\delta} \varphi e^{-\lambda(f_0-f)}\, dt\right| = e^{-\lambda_0 f_0} \left|\int_a^{t_0-\delta} \varphi e^{\lambda_0 f} e^{-(\lambda-\lambda_0)(f_0-f)}\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda_0 f_0} e^{-(\lambda-\lambda_0)h} \int_a^{t_0-\delta} |\varphi|\, e^{\lambda_0 f}\, dt$$

(on s'est servi de la condition 2°), et puisque l'intégrale de droite existe en vertu de la condition 1°, il vient

$$\int_a^{t_0-\delta} \varphi e^{-\lambda(f_0-f)}\, dt = o(e^{-\lambda h}). \tag{6}$$

L'intégrale étendue à l'intervalle $[t_0 + \delta, b]$ est du même ordre si $t_0 < b - \delta$.

Poursuivons la procédure d'estimation de manière différente dans deux cas en nous limitant dans chacun d'eux à une situation élémentaire.

Cas I. Le point t_0 en lequel f présente un maximum est intérieur à l'intervalle d'intégration et $f''(t_0) \neq 0$. Le développement de Taylor de f au voisinage de t_0 (développement qui existe d'après la con-

dition 3°) est de la forme

$$f(t) = f_0 + c_2 (t - t_0)^2 + \ldots, \quad c_2 = \frac{f''(t_0)}{2} < 0.$$

Puisque $f_0 - f(t) \geqslant 0$ dans un voisinage de t_0, en posant $f_0 - f(t) = \tau^2$, on obtient

$$\tau = (t - t_0) \sqrt{-c_2 - c_3 (t - t_0) - \ldots} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (t - t_0)^n,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{-\frac{f''(t_0)}{2}}. \tag{7}$$

Cette série peut être localement inversée, puisque $\alpha_1 \neq 0$ (par exemple, à l'aide des formules de Bürman — Lagrange du n° 35) et l'on obtient une série en τ qui représente la fonction $t = t(\tau)$ inverse de (7); il est évident que $t(0) = t_0$ et $t'(0) = 1/\alpha_1 = \sqrt{-2/f''(t_0)}$.

L'intégrale (1) devient

$$F(\lambda) = e^{\lambda f_0} \int_a^{\delta''} \varphi(t)\, e^{-\lambda(f_0 - f(t))}\, dt,$$

et en outre, en vertu de la relation (6) et de la relation analogue à (6) envisagée sur l'intervalle $[t_0 + \delta, b]$, le calcul du développement asymptotique peut être limité à un voisinage $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aussi petit que l'on veut. En faisant le changement $f_0 - f(t) = \tau^2$ dans ce voisinage, on obtient

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda f_0} \int_{-\delta'}^{\delta''} \varphi \circ t(\tau) \cdot t'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau, \tag{8}$$

où $t(\tau)$ est l'inverse de la fonction (7), et $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$, des nombres petits que l'on peut poser égaux à δ sans modifier les développements asymptotiques. Soient

$$\psi(\tau) = \varphi \circ t(\tau) \cdot t'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n, \quad a_0 = \varphi(t_0) \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}} \tag{9}$$

(on s'est de nouveau servi de la condition 3°); au lieu de (8) on a alors

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda f_0} \int_{-\delta}^{\delta} \psi(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau = e^{\lambda f_0} \int_0^{\delta} [\psi(\tau) + \psi(-\tau)]\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau.$$

Reste à utiliser le lemme dans lequel il faudra poser $\alpha = 2$, $c_n = 2a_{2n}$ et l'on aura démontré le

Théorème 1. *Si les conditions* 1°, 2° *et* 3° *sont remplies et la fonction f présente un maximum en un point $t_0 \in]a, b[$, et de plus $f''(t_0) < 0$, alors*

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, d\tau \sim e^{\lambda f(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{10}$$

avec des coefficients tirés de la série (9)

Remarque. On sait que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi};$$

quant au coefficient a_0, il a été calculé plus haut. Le terme principal du développement (10) est donc de la forme

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt \approx \varphi(t_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{f''(t_0)}}\, \frac{e^{\lambda f(t_0)}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{11}$$

Remarquons encore qu'en vertu des propriétés de la fonction gamma

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \ldots \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Exemple. Formule asymptotique de Stirling pour la fonction gamma. On a

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x}\, dx = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{\infty} t^{\lambda} e^{-\lambda t}\, dt = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t - \ln t)}\, dt$$

(on a posé $x = \lambda t$). Ici $\varphi(t) \equiv 1$, $f(t) = \ln t - t$, le maximum est réalisé au point $t_0 = 1$ et $f''(t_0) = -1$. Le théorème 1 est applicable et d'après la formule (11)

$$\Gamma(\lambda + 1) \approx \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}. \tag{12}$$

En poussant les calculs, on trouve que $a_2 = \sqrt{2}/6$ et le terme suivant du développement asymptotique est:

$$\Gamma(\lambda + 1) \approx \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \left(1 + \frac{1}{12\lambda}\right). \tag{13}$$

En principe, le théorème 1 nous donne tous les termes du développement asymptotique.

Cas II. Le point t_0 en lequel f présente un maximum est confondu avec une borne de l'intervalle d'intégration et $f'(t_0) \neq 0$. Supposons que $t_0 = a$. Posons $f(a) - f(t) = \tau$. Au lieu de (7) on aura

$$\tau = -c_1(t-a) - c_2(t-a)^2 - \ldots,$$
$$c_1 = f'(a) \neq 0, \tag{14}$$

d'où l'on déduit la fonction $t(\tau)$ par inversion de la série. Si l'on pose

$$\psi(\tau) = \varphi \circ t(\tau) \cdot t'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n, \quad b_0 = -\frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \tag{15}$$

en raisonnant comme dans le cas I, on trouve

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda f(a)} \int_0^{\delta} \psi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau.$$

Nous sommes de nouveau conduits au lemme dans lequel cette fois-ci $\alpha = 1$, donc $\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) = \Gamma(n+1) = n!$ On a ainsi prouvé le

Théorème 2. *Si les conditions* 1°, 2° *et* 3° *sont remplies, la fonction f présente un maximum à la borne a de l'intervalle d'intégration et $f'(a) \neq 0$, alors*

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt \sim e^{\lambda f(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, b_n}{\lambda^{n+1}} \tag{16}$$

avec des coefficients tirés de la série (15). *Le terme principal du développement asymptotique est de la forme*

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt \approx -\frac{\varphi(a)}{f'(a)} \frac{e^{\lambda f(a)}}{\lambda}. \tag{17}$$

Signalons en conclusion que la méthode de Laplace passe dans le cas aussi où toutes les dérivées de f d'ordre $\leqslant m$ sont nulles au point t_0 où f présente un maximum et $f^{(m)}(t_0) \neq 0$. Le changement $f(t_0) - f(t) = \tau^m$ nous conduit encore au lemme dans lequel i faut poser $\alpha = m$. Le cas $m > 2$ n'apporte que des complications d'ordre technique.

53. Méthode du col. Cette méthode qui est la variante complexe de la méthode de Laplace donne le développement asymptotique, pour de grandes valeurs positives du paramètre λ, des intégrales de

la forme

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} \varphi(z)\, e^{\lambda f(z)}\, dz, \tag{1}$$

où le chemin d'intégration γ est situé à l'intérieur du domaine d'holomorphie des fonctions f et φ.

Le théorème de Cauchy nous permet de déformer de façon homotope le chemin γ dans le domaine d'holomorphie afin de choisir le meilleur chemin d'intégration. Le module du facteur de l'intégrant contenant le paramètre est

$$|e^{\lambda f(z)}| = e^{\lambda \operatorname{Re} f(z)}, \tag{2}$$

et pour obtenir la plus grande précision pour de grands λ, il faut prendre pour γ la ligne le long de laquelle Re f présente le maximum le plus prononcé, i.e. Re f varie le plus rapidement.

Aux points non critiques de f la direction de la plus rapide variation de Re f est perpendiculaire à la ligne Re f = const et par conséquent est confondue avec celle de la ligne de niveau Im f. Ceci vaut également pour les points critiques, i.e. pour les zéros de la dérivée f'. En effet, sans perdre en généralité on peut admettre que le point critique z_0 est confondu avec l'origine 0 et qu'au voisinage de $z_0 = 0$ on a $f(z) = z^m + o(z^m)$, où $m \geqslant 2$ est un entier (on réalise ceci par une transformation linéaire sur z).

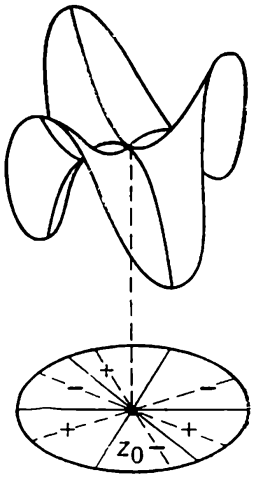

Fig. 84

En posant $z = re^{i\varphi}$, on trouve Re $f = r^m \cos m\varphi + o(r^m)$, d'où l'on voit que le niveau critique Re $f = 0$ est composé localement de m courbes différentiables tangentes au point $z_0 = 0$ à des droites sur lesquelles $\cos m\varphi = 0$. Ces courbes divisent le voisinage de z_0 en $2m$ secteurs dans lesquels Re f prend alternativement des valeurs positives et des valeurs négatives (cf. fig. 84, qui représente la surface u = Re f au voisinage d'un point critique avec $m = 3$; cette surface s'appelle *selle du singe*, elle présente trois creux: deux pour les pattes et un pour la queue). Les directions de la plus rapide variation de Re f sont données par les bissectrices de ces secteurs, elles sont définies par l'équation $\sin m\varphi = 0$ et sont confondues avec la direction de la ligne de niveau Im $f = 0$ (en pointillé sur la figure 84).

Par un heureux concours de circonstances le choix en qualité de γ de la ligne de niveau Im f = const simplifie essentiellement l'estimation asymptotique de l'intégrale (1). En effet, le facteur $g^{i\lambda \operatorname{Im} f}$ est constant par ce choix et on peut le sortir du signe d'inté-

gration :

$$F(z) = e^{i\lambda \operatorname{Im} f(z)} \int_{\gamma} \varphi(z)\, e^{\lambda \operatorname{Re} f(z)}\, dz.$$

Si $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, est l'équation de γ, le problème se ramène à l'estimation asymptotique de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi \circ z(t) \cdot z'(t)\, e^{\lambda \operatorname{Re} f \circ z(t)}\, dt, \tag{3}$$

par la méthode de Laplace (le fait que le facteur par lequel est multiplié $e^{\lambda \operatorname{Re} f}$ est complexe ne nuit pas à l'applicabilité de la méthode).

Suivant la méthode de Laplace il faut prendre pour des lignes de niveau $\operatorname{Im} f = \text{const}$ sur lesquelles sont situés les points de maximums de $\operatorname{Re} f$. En un point de maximum de $\operatorname{Re} f$ sur γ on doit avoir $\frac{d}{dt} \operatorname{Re} f \circ z(t) \mid_{t_0} = 0$ et puisque $\frac{d}{dt} \operatorname{Im} f \circ z(t) \equiv 0$, on a en ce point de maximum

$$\frac{d}{dt} f \circ z(t) \mid_{t_0} = f'(z_0)\, z'(t_0) = 0. \tag{4}$$

Si $z'(t_0) \neq 0$ (ce que nous supposerons), alors $f'(z_0) = 0$, i.e. le point de la ligne $\operatorname{Im} f = \text{const}$ en lequel $\operatorname{Re} f$ présente un maximum est confondu avec un point critique de f.

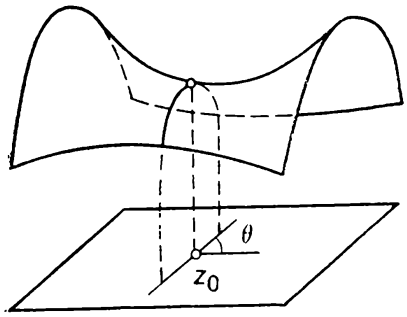

Fig. 85

Nous sommes conduits donc à la règle suivante de choix du contour γ pour l'estimation asymptotique de l'intégrale (1) : le contour doit passer par les points critiques de la fonction f et au voisinage de chaque point z_0 suivre les directions de ces portions de la ligne de niveau $\operatorname{Im} f = \text{const}$ sur lesquelles $\operatorname{Re} f$ présente un maximum en z_0. Chaque point critique z_0 apporte sa contribution à la représentation asymptotique de l'intégrale, et en outre la principale contribution provient visiblement de celui en lequel $\operatorname{Re} f$ prend la plus grande valeur (si ces points sont plusieurs, il faut prendre chacun d'eux).

Etudions en détail le cas d'un point critique z_0 pour lequel $m = 2$. Ce point est un col pour la surface $u = \operatorname{Re} f$, d'où le nom de cette méthode *). La ligne $\operatorname{Im} f = \text{const}$ est constituée de deux

*) Au voisinage d'un tel point la surface $u = \operatorname{Re} f$ a la forme d'une selle et on l'appelle parfois méthode du point selle. Cette méthode (ou sa légère modification) porte parfois le nom de méthode de phase stationnaire (cette dénomination provient du fait que naguère l'argument d'un nombre complexe était appelé phase).

branches sur l'une desquelles Re f présente un maximum en z_0 et sur l'autre un minimum, de sorte que le choix de la direction γ est unique: c'est la ligne de plus grande pente (fig. 85). Désignons la direction choisie par $e^{i\theta}$.

Calculons le terme principal de la contribution de ce point à la représentation asymptotique de l'intégrale (1). D'après la formule (11) du numéro précédent dans laquelle en vertu de (3) il faut remplacer $\varphi(t)$ par $\varphi \circ z(t) \cdot z'(t)$ et $f(t)$ par $\operatorname{Re} f \circ z(t)$, on obtient

$$\varphi(z_0)\, z'(t_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Re} f \circ z(t)\Big|_{t_0}}}\, \frac{e^{\lambda \operatorname{Re} f(z_0)}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{5}$$

Puisque $\operatorname{Im} f = \text{const}$ sur γ, on a $\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Re} f \circ z(t) = \frac{d^2}{dt^2} f \circ z(t) = f''(z)(z'(t))^2 + f'(z)\, z''(t)$ sur γ, et au point critique $f'(z_0) = 0$, donc

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Re} f \circ z(t)\,|_{t_0} = -\,|f''(z_0)|\;|z'(t_0)|^2,$$

car ce nombre doit être réel et strictement négatif. Par ailleurs, $z'(t_0) = |z'(t_0)|\, e^{i\theta}$, de sorte que l'expression (5) devient

$$\varphi(z_0)\, e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}}\, \frac{e^{\lambda \operatorname{Re} f(z_0)}}{\sqrt{\lambda}}.$$

En se rappelant la formule (2), on obtient finalement le

Théorème. *Si* Re f *atteint son maximum en un point critique* z_0 *de* f *qui est un col* ($f''(z_0) \neq 0$), *le terme principal du développement asymptotique de l'intégrale* (1) *est donné par la formule*

$$\int_\gamma \varphi(z)\, e^{i\lambda f(z)}\, dz \approx \varphi(z_0)\, e^{i\theta} \cdot e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, |f''(z_0)|}}, \tag{6}$$

où $e^{i\theta}$ *est la direction de plus grande pente.*

Exemple. La *fonction de Bessel d'ordre n* est définie par l'intégrale

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{7}$$

Ici $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ et les points critiques sont $z = \pm i$; le niveau Re f prend la même valeur 0 en ces points, donc il faut tenir compte des deux directions. La ligne de niveau critique $\operatorname{Re} f = 0$ est composée du cercle $\{\,|z| = 1\}$ et de l'axe imaginaire, les directions de plus grande pente sont $\theta = -\pi/4$ en $z = i$ et $\theta =$

$= \pi/4$ en $z = -i$ (fig. 86). La formule (6) nous donne

$$J_n(\lambda) \approx \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{n\pi i}{2}}} e^{\lambda i}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{n\pi i}{2}}} e^{-\lambda i}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (8)$$

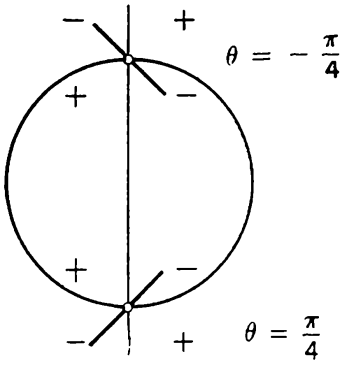

Fig. 86

(pour $n = 0$ comparer avec la formule (11) du n° 51).

Exercices

1. (Théorème d'Hadamard des trois cercles.) Montrer que si f est holomorphe dans $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$ et $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, alors $\ln M_f(r)$ est une fonction convexe de $\rho = \ln r$, i.e. pour tout $r \in]r_1, r_2[$ on a

$$\ln M_f(r) \leqslant \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \ln M_f(r_2) + \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} \ln M_f(r_1).$$

[N o t a : choisir α tel que $r_1^\alpha M_f(r_1) = r_2^\alpha M_f(r_2)$, et appliquer le principe du maximum à la fonction multivalente $z^\alpha f(z)$ dont le module est univalent.

2. Soient f une fonction entière et $\alpha \in]0, 1[$ un nombre fixe. Montrer que $\lim_{r\to\infty} \frac{M_f(\alpha r)}{M_f(r)}$ est égal à 0 si f est transcendante et à α^n si f est un polynôme de degré n.

3. Soient τ et τ' deux points non alignés avec $z = 0$. Montrer que la série $\frac{1}{z^2} + \sum_{t \in T \setminus \{0\}} \left\{\frac{1}{(z-t)^2} - \frac{1}{t^2}\right\}$, où $T = \{t = m\tau + n\tau'$; m et n sont des entiers$\}$, converge au sens du n° 45 sur le plan tout entier vers une fonction méromorphe (qui est elliptique et s'appelle $\wp$-fonction de Weierstrass).

4. Montrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^n})$ converge vers $(1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$.

5. Trouver une fonction holomorphe dans le disque $\{|z| < 1\}$ présentant des zéros aux points $1 - \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et en eux seuls.

6. Soient $\lambda \neq 0$ un nombre complexe et $p(z) \not\equiv 0$ un polynôme ; montrer que la fonction entière $e^{\lambda z} - p(z)$ admet une infinité

de zéros. [N o t a : dans le cas contraire $e^{\lambda z} - p(z) \equiv e^{az+b}Q(z)$, où Q est un polynôme ; alors $a = \lambda$ et l'identité est impossible.]

7. Montrer que l'équation $\sin z = z$ possède une infinité de racines.

8. Résoudre le problème 21 du chapitre IV à l'aide du théorème d'Hadamard du n° 48.

9. Soit donnée une suite arbitraire de points $a_n \in \mathbf{C}$ convergeant vers le point à l'infini. Montrer que pour toute suite de nombres $b_n \in \mathbf{C}$ on peut trouver une fonction entière f telle que $f(a_n) = b_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

10. Soient D un domaine de $\mathbf{C}$ et une suite de points $a_n \in \mathbf{C}$ ne possédant pas de points d'accumulation à l'intérieur de D. Montrer que pour toute suite de nombres complexes b_n et toute suite de nombres $k_n > 0$ il existe une fonction f holomorphe dans D telle que pour tout n la fonction $f(z) - b_n$ présente un zéro d'ordre k_n en a_n.

11. Soit f une fonction holomorphe et bornée dans le demi-plan de droite. Montrer que si elle tend vers 0 sur l'axe réel lorsque $x \to \infty$, alors $f(z) \to 0$ et $|\operatorname{Arg} z| < \pi/2 - \delta$ lorsque $z \to \infty$, pour tout $\delta > 0$ (théorème de Lindelöf).

12. Montrer que si une fonction f est holomorphe et bornée dans le demi-plan de droite et $f(n) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, alors $f \equiv 0$.

13. a) Montrer que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt = \frac{n!}{z(z-1)\ldots(z+n)}.$$

[N o t a : effectuer la substitution $t = n\tau$ et intégrer par parties.]

b) Montrer que $0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{2n}$ pour $0 \leqslant t \leqslant n$ et en déduire que les intégrales de a) convergent vers la fonction $\Gamma(z)$ dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

où $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ est la constante d'Euler (il suit de là que $1/\Gamma(z)$ est une fonction entière et l'expression ci-dessus est son développement de Weierstrass).

d) Prouver l'identité $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$.

14. a) Montrer que la fonction de Bessel $J_n(\lambda)$ définie par la formule (7) du n° 53 est entière pour tout $n \geqslant 0$.

b) Vérifier que pour $n = 0$ cette fonction satisfait l'équation (8) du n° 51.

15. Soit g une fonction holomorphe et bornée dans un domaine contenant l'axe x et soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^h$ son développement de Taylor au voisinage de l'origine. Montrer que sur l'axe positif λ on a le développement asymptotique

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-\lambda t^2/2}\, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)\, c_{2n}}{\lambda^n}.$$

16. Etablir la formule asymptotique pour de grands $\lambda > 0$ de l'intégrale

$$f(\lambda) = \int_0^{\pi} e^{i\lambda \cos t} \cos^2 t\, dt.$$

ANNEXE

FONCTIONS HARMONIQUES ET SUBHARMONIQUES

Nous décrivons ici deux classes de fonctions réelles étroitement liées aux fonctions holomorphes. La théorie développée plus bas sera utilisée dans le tome 2.

1. Fonctions harmoniques. Définition. On dit qu'une fonction réelle u de classe C^2 est *harmonique* dans un domaine $D \subset \mathbf{C}$ si partout dans D elle vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

L'opérateur différentiel du premier membre de (1) s'appelle *opérateur de Laplace* ou *laplacien* et se note Δ ; il est aisé de voir que

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}. \tag{2}$$

Le lien entre les fonctions harmoniques et holomorphes est exprimé par les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. *Les parties réelle et imaginaire de toute fonction f holomorphe dans un domaine D sont harmoniques dans D.*

▶ On a

$$u = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad v = \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

d'où u, $v \in C^2$. D'autre part, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\right.$ puisque f est holomorphe ; quant à la fonction $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$, elle est antiholomorphe$\Big)$ et de façon analogue $\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 0$. ◀

Théorème 2. *Pour toute fonction u harmonique dans un domaine D, on peut construire localement, au voisinage de chaque point $z_0 \in D$,*

une fonction f holomorphe dans ce voisinage pour laquelle u est la partie réelle (ou imaginaire).

▶ Soit $U=\{|z-z_0|<r\}\subset D$; en vertu de (1) la forme $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ est exacte dans U (cf. n° 16), donc l'intégrale de ω dans U est indépendante du chemin d'intégration et la fonction

$$v(z)=\int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{3}$$

est définie dans U. Par une méthode usuelle en analyse réelle on démontre que v est différentiable dans U (au sens de $\mathbf{R}^2$) et que ses dérivées partielles sont respectivement égales à

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

On reconnaît ici les conditions de différentiabilité complexe de la fonction $f=u+iv$ et $u=\operatorname{Re} f$. La fonction $if=-v+iu\in \mathcal{O}(D)$ admet u pour partie imaginaire. ◀

Remarque. Si le domaine D est simplement connexe, on démontre par le même raisonnement l'existence d'une fonction $f\in\mathcal{O}(D)$ pour laquelle $u=\operatorname{Re} f$ globalement, dans le domaine D tout entier. Ce théorème n'est pas valable pour les domaines multiplement connexes.

Exemple: dans le domaine $D=\{0<|z|<1\}$ la fonction $u=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln z\bar{z}$ est harmonique, mais les conditions (4) avec cette fonction u ne sont satisfaites que par la fonction $v=\arg z$ qui n'est définie que localement dans D (v n'est pas définie dans D tout entier, car elle est multivalente).

Le lien établi permet d'étendre aux fonctions harmoniques certaines propriétés des fonctions holomorphes.

1. Dérivabilité infinie. *Toute fonction $u(x, y)$ harmonique dans un domaine D possède en chaque point des dérivées partielles de tout ordre qui sont aussi harmoniques dans D.*

▶ D'après le théorème 2 construisons au voisinage U de $z=x+iy$ une fonction f telle que $u=\operatorname{Re} f$ et remarquons que $\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{Re} f'(z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\operatorname{Im} f'(z)$. Ces dérivées partielles sont harmoniques dans U d'après le théorème 1. En leur appliquant ce qui a été déjà prouvé, on établit l'existence et l'harmonicité des dérivées partielles secondes, et ainsi de suite. ◀

2. Théorème de la moyenne. *Si une fonction u est harmonique dans un disque $U = \{\zeta : |\zeta - z| < R\}$, pour tout $r < R$ la valeur prise par u au centre du disque U est égale à la moyenne de ses valeurs sur le cercle $\{|\zeta - z| = r\}$:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt. \tag{5}$$

On établit ce théorème en séparant les parties réelles dans la formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt,$$

qui traduit le théorème de la moyenne pour les fonctions holomorphes.

Remarquons que dans ce théorème au lieu de la moyenne sur le cercle, on peut prendre la moyenne sur le disque U:

$$u(z) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_U u(\zeta)\, d\sigma, \tag{6}$$

où $d\sigma = r dr\, dt$ est l'élément d'aire. Pour établir cette formule, il suffit de multiplier les deux parties de (5) par r et d'intégrer par rapport à r entre 0 et R.

3. Théorème d'unicité. *Si deux fonctions u_1 et u_2 harmoniques dans un domaine D sont confondues sur un ensemble $E \subset D$ possédant au moins un point intérieur, alors $u_1 \equiv u_2$ dans D.*

▶ Posons $u = u_1 - u_2$ et considérons l'ensemble $F = \{z \in D : u(z) = 0\}$. Le noyau ouvert $\mathring{F}$ n'est pas vide par hypothèse; il est fermé dans D, car si $z_0 \in D$ est un point d'accumulation de $\mathring{F}$, il existe une suite $z_n \in \mathring{F}$ telle que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ et la fonction $f = u + iv$, qui est holomorphe au voisinage de z_0, est une constante imaginaire *), i.e. $u \equiv 0$ dans ce voisinage et $z_0 \in \mathring{F}$. Donc $\mathring{F} \equiv D$.◀

On remarque que pour les fonctions harmoniques le théorème d'unicité s'énonce sous une forme plus faible que pour les fonctions holomorphes: on exige que l'ensemble E possède non pas un

*) Dans le voisinage U envisagé il existe un point $z_n \in \mathring{F}$ au voisinage $V \subset U$ duquel $u \equiv 0$; d'après les équations de Cauchy — Riemann dans V on a $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, i.e. $v = c = \text{const}$; alors $f = ic$ sur U.

point d'accumulation mais un point intérieur dans D. Le théorème est faux dans la forme plus forte : en effet, la fonction $u \equiv x$ harmonique dans $\mathbf{C}$ est nulle sur l'axe imaginaire sans être identiquement nulle.

4. Principe d'extrémum. *Si une fonction u harmonique dans un domaine D atteint son maximum ou son minimum (locaux) en un point $z_0 \in D$, elle est constante dans D.*

▶ Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage U de z_0 telle que $u = \operatorname{Re} f$; si u atteint son maximum en z_0, il en sera de même du module de la fonction e^f holomorphe dans U ($|e^f| = e^u$) ; donc f et par conséquent u sont constantes dans U. D'après le théorème d'unicité, u est constante dans D aussi. Le cas du minimum se ramène à celui du maximum par la substitution de $-u$ à u. ◀

5. Théorème de Liouville. *Si une fonction u est harmonique dans $\mathbf{C}$ et bornée au moins d'un côté, par exemple $u(z) < M$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors $u \equiv$ const.*

▶ Puisque $\mathbf{C}$ est simplement connexe, il existe une fonction entière f telle que $u = \operatorname{Re} f$ dans $\mathbf{C}$. Toutes les valeurs de f sont situées par hypothèse dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} f < M\}$. Soit λ une transformation homographique de ce demi-plan sur le disque unité. Alors $\lambda \circ f$ est une fonction entière bornée, i.e. une constante. D'où il suit que f et donc $u =$ const. ◀

6. Invariance par les applications conformes. *Si u est une fonction harmonique dans un domaine D et $z = z(\zeta)$, une application conforme de D^* sur D, la fonction composée $u \circ z(\zeta)$ est harmonique dans D^*.*

▶ Considérons un point arbitraire $\zeta \in D^*$ et son image $z_0 = z(\zeta_0)$. Construisons au voisinage de z_0 une fonction holomorphe f telle que $u = \operatorname{Re} f$. Alors $u \circ z(\zeta) = \operatorname{Re} f \circ z(\zeta)$ et puisque la fonction $f \circ z(\zeta)$ est holomorphe au voisinage de ζ_0, la fonction composée $u \circ z(\zeta)$ est harmonique dans ce voisinage. ◀

Au numéro suivant on montrera que le théorème de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques, i.e. on a le

Théorème 3. *Si une fonction u finie dans un domaine D et localement intégrable sur une surface en chaque point $z \in D$ pour tout $r \leqslant r_0(z)$, où $r_0(z)$ est la distance de z à ∂D, est confondue avec sa moyenne sur le disque $\{\zeta : |\zeta - z| < r\}$:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\{|\zeta - z| < r\}} u(\zeta)\, d\zeta \tag{7}$$

alors elle est harmonique dans D.

Nous allons appliquer ce théorème à la démonstration d'une proposition sur la limite d'une suite de fonctions harmoniques, qui nous sera utile dans la suite de l'exposé.

Théorème 4 (Harnack *)). *La limite d'une suite strictement décroissante de fonctions u_k ($k = 1, 2, \ldots$) harmoniques dans un domaine D soit est une fonction harmonique dans D, soit est égale à $-\infty$.*

▶ Supposons tout d'abord que u est partout finie dans D ; d'après le théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, en tout point $z \in D$

$$u_k(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\{|\zeta - z| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \tag{8}$$

pour tout $r < r_0(z)$, où $r_0(z)$ est la distance de z à ∂D. La suite u_k étant strictement monotone, on peut faire tendre $k \to \infty$ dans (8). On obtient

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\{|\zeta - z| < r\}} u(\zeta)\, d\sigma,$$

la fonction u étant localement intégrable sur une surface. D'après le théorème 3 il suit de là que la fonction u est harmonique dans D.

Supposons maintenant que $u = -\infty$ en un point $z_0 \in D$. Soit $E = \{z \in D : u(z) = -\infty\}$. Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient le point z_0. Il est ouvert : soit $z_1 \in E$ et supposons que la distance de z_1 à ∂D est égale à 2ρ. On a

$$\frac{4}{\pi\rho^2} \iint\limits_{\left\{|\zeta - z_1| < \frac{\rho}{2}\right\}} u(\zeta)\, d\sigma = u(z_1) = -\infty.$$

Donc, pour tout $z \in \left\{|z - z_1| < \frac{\rho}{2}\right\}$

$$u(z) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{\{|\zeta - z| < \rho\}} u(\zeta)\, d\sigma = -\infty,$$

car le disque $\{|\zeta - z| < \rho\}$ contient le disque $\left\{|\zeta - z_1| < \frac{\rho}{2}\right\}$; par conséquent, $\{|z - z_1| < \rho/2\} \subset E$. On démontre de la même façon que E est fermé (pour la topologie de D). Donc $E = D$, i.e. $u \equiv -\infty$ dans D. ◀

Signalons en conclusion de ce numéro que la notion d'harmonicité se généralise aux fonctions d'un nombre quelconque de variables réelles. Soit D un domaine dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ à n dimensions. On dit qu'une fonction $u : D \to \mathbf{R}$ de classe C^2 est

*) Ce théorème a été démontré en 1887 par le mathématicien allemand Karl Harnack (1851-1888).

harmonique dans D si en chaque point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ elle satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0. \tag{9}$$

Ces fonctions sont justiciables des propriétés 1 à 5 des fonctions harmoniques de deux variables. Ces propriétés impliquent des démonstrations spéciales (car celles déjà produites sont basées sur les propriétés des fonctions holomorphes) sur lesquelles nous glisserons.

2. Problème de Dirichlet *). Le prolongement harmonique des fonctions se pose dans de nombreux problèmes d'analyse. Etudions-le dans une position élémentaire.

Problème de Dirichlet. *Etant donné un domaine simplement connexe $D \subset \mathbf{C}$ de frontière de Jordan ∂D et une fonction continue u définie sur ∂D, on demande de prolonger harmoniquement la fonction u au domaine D, i.e. de construire une fonction continue dans $\overline{D}$, harmonique dans D et confondue avec u sur ∂D.*

a) *Unicité.* Montrons que le problème de Dirichlet ne peut avoir deux solutions distinctes. Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2. Leur différence $v = u_1 - u_2$ est harmonique dans D, continue dans $\overline{D}$ et nulle sur ∂D. Si v atteint son maximum ou son minimum en un point de D, alors $v = \text{const}$ dans D en vertu du principe de l'extrémum, et dans $\overline{D}$, par continuité. Puisque $v \equiv 0$ sur ∂D, on aurait $v \equiv 0$ dans $\overline{D}$. Si ces deux quantités étaient atteintes sur ∂D, elles seraient nulles et on aurait encore $v \equiv 0$ dans $\overline{D}$.

b) *Réduction à un disque.* Supposons que le problème de Dirichlet admet une solution sur le disque unité $U = \{ |z| < 1 \}$ et montrons qu'il en admet une sur tout domaine D simplement connexe à frontière de Jordan ∂D. En effet, d'après le théorème de Riemann il existe une application conforme $f : D \to U$ prolongeable par continuité dans $\overline{D}$ d'après le principe de correspondance des frontières (n° 41). Soit u une fonction continue sur ∂D ; donnons-nous les valeurs de $v = u \circ f^{-1}$ sur ∂U et désignons par v le prolongement harmonique de ces valeurs dans U (ce prolongement existe par hypothèse). La fonction $u = v \circ f$ sera alors harmonique dans D d'après la propriété 6 du numéro précédent. Cette fonction est continue dans $\overline{D}$ et égale à $u \circ f^{-1} \circ f = u$ sur ∂D, i.e. est la solution du problème de Dirichlet dans D.

c) *Solution dans un disque $U = \{ |z| < R \}$.* Commençons par des raisonnements euristiques. Supposons que le problème de Di-

*) Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand (1805-1859).

richlet admet une solution dans le disque U. Construisons une fonction f holomorphe dans U et possédant cette solution pour partie réelle. Supposons encore que f est prolongeable par continuité dans $\overline{U}$ *). En tout point $z \in U$ on a alors d'après la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,\zeta}{\zeta - z} \, dt \tag{1}$$

(nous avons posé $\zeta = Re^{it}$; alors $d\zeta = i\zeta dt$). Transformons le second membre de (1) de telle sorte que sa partie réelle contienne seulement les valeurs connues de $\operatorname{Re} f = u$ sur ∂U. A cet effet prenons le point $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}$ symétrique de z par rapport à ∂U, utilisons le théorème de Cauchy qui dit que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,\zeta}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}} \, dt \tag{2}$$

et soustrayons (2) de (1). En tenant compte du fait que

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta \bar{z}}{\zeta \bar{z} - R^2} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

on aura

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \, dt.$$

On a ainsi obtenu ce qu'on voulait: en mettant en évidence les parties réelles, on obtient la *formule de Poisson* **)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \, dt. \tag{3}$$

Passons à la résolution exacte.

Le second membre de la formule de Poisson est connu si les valeurs de u sur ∂U sont données. Montrons que la fonction u définie dans U par cette formule est solution du problème de Dirichlet dans le disque.

Remarquons tout d'abord que le noyau de l'intégrale de Poisson peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = P(\zeta, z). \tag{4}$$

*) Cette proposition concerne $\operatorname{Im} f$, puisque $\operatorname{Re} f$ est solution du problème de Dirichlet, donc est continue dans U.

**) Denis Poisson (1781-1840), mathématicien français.

Donc la fonction u définie par l'intégrale de Poisson est la partie réelle dans U de la fonction

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dt \tag{5}$$

holomorphe dans U*) et par suite est harmonique dans U. Reste à montrer que lorsque z tend de l'intérieur de U vers un point $\zeta_0 \in \partial U$, la valeur de $u(z)$ tend vers $u(\zeta_0)$.

Pour prouver ceci on remarquera que pour tout point $z \in U$

$$\int_0^{2\pi} P(\zeta, z)\,dt = 1. \tag{6}$$

Ceci résulte de ce qui a été démontré plus haut: la fonction $u \equiv 1$ est l'unique solution du problème de Dirichlet prenant la valeur frontière $u = 1$ et elle satisfait aux conditions sous lesquelles a été établie la formule de Poisson. D'autre part,

$$\lim_{z\to\zeta_0} P(\zeta, z) = 0 \quad \text{pour} \quad \zeta \neq \zeta_0, \quad z \in U, \tag{7}$$

et de plus la convergence est uniforme en ζ sur tout disque $\gamma \subset \subset \partial U$ ne contenant aucun voisinage du point ζ_0, ce qui est visible sur la formule (4).

En vertu de (6) la différence entre la valeur de u et sa limite présumée lorsque $z \to \zeta_0 = Re^{it_0}$ est égale à

$$\Delta = \int_0^{2\pi} u(\zeta)\,P(\zeta, z)\,dt - u(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\}\,P(\zeta, z)\,dt.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et en se servant de la continuité de $u(\zeta)$ au point ζ_0 choisissons $\delta > 0$ tel que pour $|t - t_0| \leqslant 2\delta$ l'on ait

$$|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon; \tag{9}$$

soient $\gamma_1 = \{\zeta \in \partial U : |t - t_0| \leqslant 2\delta\}$ et $\gamma_2 = \partial U \setminus \gamma_1$. Décomposons l'intégrale (8) en intégrales le long des arcs γ_1 et γ_2. Pour la

*) On démontre que la fonction (5) est holomorphe par une dérivation sous le signe d'intégration: pour tout $z \in U$, on a

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta\,dt}{(\zeta-z)^2} = \frac{\Delta z}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta u(\zeta)\,dt}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)},$$

d'où il vient que le premier membre tend vers 0 avec Δz, i.e. $f'(z)$ existe.

première d'entre elles, en vertu de (9) on a pour tout $z \in U$

$$\left| \int_{\gamma_1} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\} P(\zeta, z)\, dt \right| < \varepsilon \int_{\gamma_1} P(\zeta, z)\, dt <$$

$$< \varepsilon \int_0^{2\pi} P(\zeta, z)\, dt = \varepsilon \quad (10)$$

(on s'est servi du fait que le noyau $P > 0$ et de l'égalité (6)).

Posons maintenant $z = re^{i\varphi}$ et supposons que $|\varphi - t_0| < \delta$; en vertu de (7) il existe un ρ, $0 < \rho < R$, tel que

$$P(\zeta, z) < \varepsilon$$

pour tout $\zeta \in \gamma_2$ et tout z tel que $|\varphi - t_0| < \delta$, $R - \rho < r < R$ (on s'est servi du fait que la convergence est uniforme dans (7)). Donc pour tout z du domaine hachuré sur la figure 87 on a

$$\left| \int_{\gamma_2} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\} P(\zeta, z)\, dt \right| < 2M \int_{\gamma_2} P(\zeta, z)\, dt \leqslant 2M\varepsilon \cdot 2\pi, \quad (11)$$

où $M = \max_{\zeta \in \partial U} |u(\zeta)|$. En combinant (10) et (11), on trouve que $|\Delta| < (1 + 4\pi M)\varepsilon$ pour tout $z \in G$, ce qu'on voulait.

On a prouvé le

Théorème 1. *Toute fonction u continue sur la frontière ∂D d'un domaine de Jordan simplement connexe D peut être prolongée harmoniquement de façon unique dans D. En particulier, la solution de ce problème dans un disque $U = \{ |z| < R \}$ est l'intégrale de Poisson* (3).

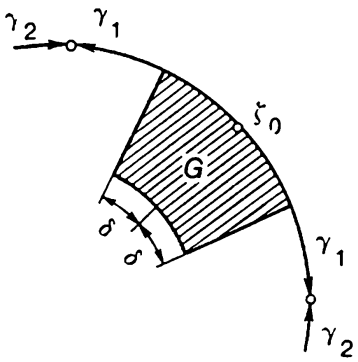

Fig. 87

A titre d'exemple d'application du prolongement harmonique effectuons la démonstration du théorème 3 du numéro précédent. Supposons qu'une fonction u finie *) dans un domaine D est confondue en chaque point z de D avec ses moyennes sur les disques de rayons $r < r_0(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\{|\zeta - z| < r\}} u(\zeta)\, d\sigma \quad (12)$$

*) Il est entendu que la fonction u est supposée localement intégrable sur une surface.

($r_0(z)$ désigne toujours la distance de z à ∂D). De là il s'ensuit tout d'abord que u est continue en chaque point $z_0 \in D$, car pour les $z - z_0$ infiniment petits la différence $u(z) - u(z_0)$ se représente par une intégrale (d'une fonction intégrable) sur un domaine d'aire infiniment petite, donc cette différence est infiniment petite.

Considérons un point arbitraire $z_0 \in D$ et un disque $U = \{ | z - z_0 | < R \} \Subset D$; construisons d'après le théorème 1 une fonction h harmonique dans U, continue dans $\overline{U}$ et égale à u sur ∂U. Il nous suffit de montrer que $u \equiv h$ dans U. Puisque h satisfait aussi à la relation (12) pour tout $z \in U$ d'après le théorème de la moyenne et $\{ | \zeta - z | < r \} \subset \overline{U}$, il en est de même de la fonction $v = u - h$. Il suit de là que si v atteint un maximum ou un minimum locaux en un point $z_1 \in U$, elle sera constante dans un voisinage de z_1. Prouvons cette proposition pour le maximum (la démonstration est la même pour le minimum). Supposons le contraire, i.e. $v(z) \leqslant v(z_1)$ dans le disque $V = \{ | z - z_1 | < r \}$, $V \subset U$, et de plus il existe un point $z_2 \in V$ tel que $v(z_2) < v(z_1)$. En vertu de (12)

$$v(z_1) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_V v(\zeta)\, d\sigma,$$

mais puisque v est continue il existe un voisinage du point z_2 dans lequel $v < v(z_1) - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et comme $v \leqslant v(z_1)$ partout dans V, le second membre de la dernière égalité est strictement inférieur à la quantité

$$\frac{v(z_1)}{\pi r^2} \iint_V d\sigma = v(z_1).$$

Cette contradiction prouve la proposition annoncée.

La fonction continue v atteint dans $\overline{U}$ son maximum M et son minimum m. Si ces deux extrémums sont atteints sur ∂U, où $v \equiv 0$, alors $M = m = 0$ et $v \equiv 0$ dans U, ce qui prouve le théorème. Supposons que l'un des extrémums, disons le maximum est atteint dans U; alors l'ensemble $E = \{z \in U : v(z) = M\}$ n'est pas vide. D'après ce qu'on a prouvé, il est vide, et comme v est continue dans U, il est fermé aussi (pour la topologie de U). Il s'ensuit de là que $E = U$, i.e. $v \equiv M$ dans U; de la continuité on déduit que $v \equiv M$ dans $\overline{U}$ et puisque $v = 0$ sur ∂U, on a de nouveau $v \equiv 0$ dans U, ce qui achève la démonstration du théorème.

L'intégrale du second membre de (5) s'appelle *intégrale de Schwarz*. Le théorème 1 nous dit qu'elle est solution du problème suivant: trouver une fonction f holomorphe dans le disque unité U dont la partie réelle est continue dans $\overline{U}$ et prend des valeurs données $u(\zeta)$ sur ∂U. La solution de ce problème qui est visiblement définie à une constante additive imaginaire près est de la

forme

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dt+iC, \tag{13}$$

où C est une constante réelle (égale à $\operatorname{Im} f(0)$, car pour $z=0$ le premier terme du second membre est égal à $u(0)=\operatorname{Re} f(0)$ d'après le théorème de la moyenne).

A titre d'exemple d'application de l'intégrale de Schwarz, établissons la modification des inégalités de Cauchy utilisées au n° 48. Soit $f=u+iv$ une fonction holomorphe dans un disque $\{|z|<R'\}$ et sur un cercle $\{|z|=R\}$, $R<R'$, et telle que sa partie réelle $u\leqslant A$. D'après la formule (13) pour $|z|<R$ et $|\zeta|=R$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{1+\frac{z}{\zeta}}{1-\frac{z}{\zeta}}\,dt+iv(0)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

et puisque pour $|z|<|\zeta|$

$$\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}=\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)\left(1+\frac{z}{\zeta}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{z^{n-1}}{\zeta^{n-1}}+\frac{z^n}{\zeta^n}+\ldots\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\zeta^n}z^n,$$

en portant ceci dans la formule précédente et en intégrant terme à terme, on obtient

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)}{\zeta^n}\,dt \quad (n\geqslant 1).$$

Mais de toute évidence pour $n\geqslant 1$ entier

$$0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A}{\zeta^n}\,dt,$$

et en soustrayant de cette égalité la précédente, on aura

$$-c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A-u(\zeta)}{\zeta^n}\,dt.$$

En passant aux modules en tenant compte du fait que par hypothèse $A-u(\zeta)\geqslant 0$ pour tout ζ, $|\zeta|=R$, on obtient les inégalités annoncées

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\{A-u(\zeta)\}\,dt=\frac{2A}{R^n}-\frac{2u(0)}{R^n},\quad n\geqslant 1 \tag{14}$$

(on s'est encore servi du théorème de la moyenne pour la fonction harmonique u).

Signalons en conclusion que le problème de Dirichlet admet une solution dans un domaine gauche moyennant certaines conditions sur sa frontière. En particulier, pour une boule à n dimensions $B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R\}$ la solution de ce problème est donnée par l'intégrale de Poisson

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B} u(y) \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{|y-x|^n} \, d\sigma, \tag{15}$$

où $\sigma_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^{n-1}$ est l'aire de la sphère à n dimensions ∂B et $d\sigma$ est l'aire élémentaire de ∂B en y ($\Gamma(2) = 1$, donc $\sigma_2 = 2\pi R$ et pour $n = 2$ cette formule est confondue avec (3) si l'on remplace $d\sigma$ par $R\,dt$). La formule (15) se déduit de la formule de Green *).

3. Fonctions subharmoniques. Le logarithme du module d'une fonction holomorphe f est une fonction harmonique au voisinage seulement des points où $f \neq 0$; aux zéros de $\operatorname{Im} |f|$ il devient infini et perd son harmonicité. On se propose maintenant d'introduire une classe plus générale de fonctions subharmoniques qui, en particulier, contiendra aussi les logarithmes des modules des fonctions holomorphes.

Les analogues unidimensionnels des fonctions harmoniques sont les fonctions affines $h(x) = kx + b$ telles que $\frac{d^2h}{dx^2} = 0$. Les fonctions affines permettent de définir les fonctions convexes de la manière suivante: une fonction $u(x)$ est dite convexe (vers le bas) si pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$ pris dans son domaine de définition et toute fonction affine $h(x)$ les inégalités $h(\alpha) \geqslant u(\alpha)$ et $h(\beta) \geqslant u(\beta)$ entraînent l'inégalité $h(x) \geqslant u(x)$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.

Les fonctions subharmoniques sont les analogues bidimensionnels des fonctions convexes. Elles ne sont pas nécessairement partout continues — on peut se contenter de leur semi-continuité.

Définition 1. Une fonction réelle u, $-\infty \leqslant u < \infty$, définie au voisinage d'un point z_0 est dite *semi-continue supérieurement* en ce point si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} u(z) - u(z_0) < \varepsilon & \text{si} \quad u(z_0) \neq -\infty, \\ u(z) < -\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad u(z_0) = -\infty, \end{cases} \tag{1}$$

*) Cf. V. Vladimirov, *Méthodes de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes* (M., « Naouka », 1964).

ou, ce qui est équivalent,

$$\limsup_{z \to z_0} u(z) \leqslant u(z_0). \tag{2}$$

Si D est un domaine, une fonction $u : D \to [-\infty, \infty[$ semi-continue supérieurement en chaque point $z \in D$ est dite *semi-continue supérieurement dans D*. Il est aisé de voir que pour qu'une fonction u soit semi-continue supérieurement dans un domaine D, il est nécessaire et suffisant que pour tout $\alpha \in]-\infty, \infty[$ l'ensemble $\{z \in D : u(z) < \alpha\}$ soit ouvert.

On définit de façon usuelle la semi-continuité d'une fonction sur un ensemble et on démontre qu'une fonction semi-continue supérieurement sur un compact K est bornée supérieurement et atteint son maximum sur K.

Définition 2. Une fonction $u : D \to [-\infty, \infty[$ s'appelle *subharmonique* dans D si 1° elle est semi-continue supérieurement dans D et 2° pour tout disque U assez petit et toute fonction h harmonique dans U et continue dans $\overline{U}$

$$h \geqslant u \text{ sur } \partial U \Rightarrow h \geqslant u \text{ dans } U. \tag{3}$$

Une telle fonction h sera appelée *majorant harmonique* de la fonction u dans le disque U.

Signalons quelques propriétés élémentaires des fonctions subharmoniques qui mettent en évidence leurs analogues avec les fonctions convexes.

Théorème 1. *Si une fonction u subharmonique dans un domaine D atteint un maximum local en un point $z_0 \in D$, elle est constante dans un voisinage de z_0.*

▶ Supposons que u n'est constante dans aucun voisinage de z_0. Il existe alors un disque $\overline{U} \subset D$ assez petit tel que $u(z) \leqslant u(z_0)$ pour tout $z \in \overline{U}$ et en un point ζ_1 du cercle $\partial U = \gamma$ on a l'inégalité stricte $u(\zeta_1) < u(z_0)$. La fonction u étant semi-continue supérieurement, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit il existe un arc $\gamma' \subset \gamma$ sur lequel $u(\zeta) < u(z_0) - \varepsilon$.

Prenons un arc $\gamma'' \Subset \gamma'$ et construisons une fonction $h(\zeta)$ continue sur γ, égale à $u(z_0) - \varepsilon$ sur γ'', à $u(z_0)$ sur $\gamma \setminus \gamma'$ et dépendant linéairement de $\operatorname{Arg}(\zeta - z_0) = t$ sur $\gamma' \setminus \gamma''$. Sur γ on aura alors $u \leqslant h$ et par définition de la subharmonicité

$$u(z_0) \leqslant h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} h(\zeta)\, dt, \tag{4}$$

où $h(z)$ est le prolongement harmonique de $h(\zeta)$ dans U (cf. numéro précédent). Mais le second membre de (4) est strictement inférieur à $u(z_0)$. Cette contradiction prouve le théorème. ◀

Le théorème suivant montre que la propriété locale de subharmonicité exprimée par la définition 2 entraîne la propriété globale correspondante.

Théorème 2. *Si une fonction u est subharmonique dans un domaine D et $G \Subset D$, alors pour toute fonction h harmonique dans G et continue dans $\overline{G}$*

$$h \geqslant u \text{ sur } \partial G \Rightarrow h \geqslant u \text{ dans } G. \tag{5}$$

▶ Posons $v = u - h$; cette fonction atteint son maximum M dans $\overline{G}$, puisqu'elle y est semi-continue supérieurement. On demande de prouver que $M \leqslant 0$. Soit $E = \{z \in G : v(z) = M\}$. Cet ensemble est ouvert d'après le théorème 1 et fermé en vertu de la semi-continuité de v. S'il est vide, M est atteint sur ∂G où $v \leqslant 0$, donc $M \leqslant 0$. Si E n'est pas vide, alors $E = G$ et $v \equiv M$ dans G, donc dans $\overline{G}$ en vertu de la semi-continuité. On a encore $M \leqslant 0$, car $v \leqslant 0$ sur ∂G. ◀

Toute fonction h satisfaisant à la condition (5) sera appelée *majorant harmonique* de la fonction u dans le domaine G.

Théorème 3. *Si une fonction u subharmonique dans un domaine D est confondue en un point z_0 d'un domaine $G \Subset D$ avec un majorant harmonique h dans G, alors $u \equiv h$ dans G.*

▶ La fonction $v = u - h$ est subharmonique et $\leqslant 0$ dans G. Elle atteint donc un maximum local en chaque point $z \in G$ où $v = 0$. L'ensemble $E = \{z \in G : v(z) = 0\}$ n'est pas vide (il contient z_0), il est ouvert d'après le théorème 1 et fermé en vertu de la semi-continuité de v. Donc $E = G$. ◀

Théorème 4. *Soit $\{u_\alpha\}$, où α parcourt un ensemble A, une famille de fonctions subharmoniques dans un domaine D. Si l'enveloppe supérieure $\tilde{u}(z) = \sup\limits_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ est semi-continue supérieurement *), elle est subharmonique dans D.*

▶ Il faut vérifier la seule condition 2° de la définition d'une fonction subharmonique. Soient un disque $U \Subset D$ et h une fonction harmonique dans U, continue dans $\overline{U}$ et $\geqslant \tilde{u}$ sur ∂U. Alors $h \geqslant u_\alpha$ sur ∂U pour tout $\alpha \in A$, et puisque u_α sont subharmoniques, on a $h \geqslant u_\alpha$ dans U aussi pour tout $\alpha \in A$. Il suit de là que $h \geqslant \tilde{u}$ dans U. ◀

---

*) Si l'ensemble A est fini, cette condition est automatiquement remplie.

Au numéro précédent on a montré que les fonctions harmoniques étaient caractérisées par le fait que leur valeur en chaque point était égale à la valeur moyenne sur un cercle (ou un disque) centré en ce point. Indiquons une propriété analogue pour les fonctions subharmoniques en changeant bien sûr l'égalité par l'inégalité correspondante.

Théorème 5 (critère de subharmonicité). *Pour qu'une fonction u semi-continue supérieurement dans un domaine D soit subharmonique dans D, il est nécessaire et suffisant qu'il existe pour chaque point $z \in D$ un nombre $r_0(z) > 0$ tel que pour tout $r < r_0$*

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt. \tag{6}$$

▶ a) *Nécessité.* Soient u une fonction subharmonique dans D, z un point arbitraire de D et r_0 la distance de z à ∂D. La fonction u étant semi-continue supérieurement, pour tout $r < r_0$ il existe une suite strictement décroissante de fonctions u_k *) continues sur le cercle $\gamma = \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, convergeant vers u sur γ. Désignons par h_k le prolongement harmonique de u_k dans le disque $U = \{\zeta : |\zeta - z| < r\}$. Puisque $u_{k+1}(\zeta) \leqslant u_k(\zeta)$ sur $\partial U = \gamma$ le principe du maximum nous dit que cette inégalité a lieu également pour les fonctions harmoniques h_k dans U, i.e. la suite h_k est strictement décroissante dans U. Donc dans U est définie la fonction

$$\hat{h}(z) = \lim_{k \to \infty} h_k(z), \tag{7}$$

fonction qui aux termes du théorème de Harnack (n° 1, Annexe) est soit harmonique dans U, soit $\equiv -\infty$.

D'après le théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques,

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{it})\, dt;$$

en passant à la limite sous le signe d'intégration (ce qui est licite en raison de la monotonie), on trouve que

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt.$$

*) Pour u on peut prendre par exemple les fonctions

$$u_k(\zeta) = \max_{\zeta' \in \gamma} \{u(\zeta') - k|\zeta - \zeta'|\}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

on laisse au lecteur le soin de prouver que u_k sont continues sur γ et que $u_k \to u$ en décroissant strictement.

Si $\hat{h} \equiv -\infty$ dans U, alors $u = -\infty$ dans U, i.e. (6) est réalisée de façon triviale. Dans le cas contraire, la subharmonicité de u et les inégalités $u \leqslant h_k$ sur ∂U impliquent que $u(z) \leqslant h_k(z)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et en faisant $k \to \infty$ on obtient

$$u(z) \leqslant \hat{h}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt.$$

Ce qui prouve la nécessité.

b) *Suffisance.* Soit u une fonction semi-continue supérieurement dans D et vérifiant la condition (6). Soit h une fonction harmonique dans un disque $U \Subset D$, continue dans $\overline{U}$ et telle que $h \geqslant u$ sur ∂U. La fonction $v = u - h$ est semi-continue supérieurement dans $\overline{U}$, et de plus d'après la condition (6) et le théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, on a pour tout $z \in U$ et r assez petit

$$u(z) - h(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(z + re^{it}) - h(z + re^{it})\}\, dt,$$

ou

$$v(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{it})\, dt.$$

La semi-continuité et cette propriété suffisent pour que v soit justiciable du théorème 1 dans le disque U. Donc si M est le maximum de v dans $\overline{U}$, l'ensemble $E = \{z \in U : v(z) = M\}$ est ouvert; il est fermé dans U en raison de la semi-continuité de v. La suite de la démonstration est la même que pour le théorème 2 : si E est vide, M est atteint sur ∂U, donc $M \leqslant 0$; si E n'est pas vide, $E \equiv U$ et $M \leqslant 0$. ◀

Une fonction h définie dans le disque U par la formule (7) s'appelle *meilleur majorant harmonique* de la fonction u dans U. On démontre maintenant sans peine la proposition énoncée au début de ce numéro.

Corollaire. *Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D, la fonction $u = \ln |f|$ est subharmonique dans ce domaine.*

▶ La semi-continuité de la fonction u coule de source. Si $z_0 \in D$ n'est pas un zéro de f, alors $\ln f$ possède une détermination holomorphe dans un voisinage de z_0; la fonction $u = \ln |f|$ est la partie réelle de cette détermination et par suite est harmonique dans ce voisinage. Le critère (6) est alors réalisé au point z_0 (avec le signe d'égalité) d'après le théorème de la moyenne. Si $f(z_0) = 0$, alors $u(z_0) = -\infty$ et le critère (6) est trivial au point z_0. ◀

Dans le tome 2 nous aurons besoin du

Théorème 6. *Si une fonction u est subharmonique et $\not\equiv -\infty$ dans un domaine D, l'ensemble $E = \{z \in D : u(z) = -\infty\}$ ne possède pas de points intérieurs.*

▶ Supposons que l'ensemble E possède un point intérieur, de sorte que le noyau ouvert $\mathring{E} \neq \varnothing$. Soit $a \in D$ un point d'accumulation de $\mathring{E}$; il existe alors un disque $\overline{U} = \{ |z-a| \leqslant r\}$ tel qu'un arc de $\gamma = \partial U$ appartient à $\mathring{E}$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, construisons une suite de fonctions h_k continues dans $\overline{U}$, harmoniques dans U, tendant sur γ vers u en décroissant strictement. Pour tout $z \in \overline{U}$ on a $u(z) \leqslant h_k(z)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(a) = -\infty$, car $u = -\infty$ sur γ tout entier. D'après le théorème de Harnack (n° 1, Annexe), $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(z) = -\infty$ pour tout $z \in U$, donc $u(z) \equiv -\infty$ dans U, i.e. $a \in \mathring{E}$. Par conséquent, $\mathring{E}$ est un sous-ensemble non vide ouvert et fermé de D, i.e. $\mathring{E} = D$ et $u(z) \equiv -\infty$ dans D. ◀

Ce théorème nous permet de démontrer le théorème suivant d'élimination des singularités de fonctions subharmoniques continues.

Théorème 7. *Soient v une fonction subharmonique et $\not\equiv -\infty$ dans un domaine D, et $E = \{z \in D : v(z) = -\infty\}$. Si une fonction u est continue dans D et subharmonique dans $D \setminus E$, elle est subharmonique dans D.*

▶ Il suffit de démontrer que v est subharmonique dans tout disque $\overline{U} = \{ |z-a| \leqslant r\} \subset D$. Puisque v est bornée supérieurement sur les sous-ensembles compacts de D, en remplaçant v par $v - c$, on peut admettre que $v \leqslant 0$ dans $\overline{U}$.

Soit h un majorant harmonique de u dans U. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $u + \varepsilon v \leqslant h$ sur $\gamma = \partial U$, et puisque $u + \varepsilon v$ est subharmonique dans U (dans $U \setminus E$ elle l'est par hypothèse, et dans $U \cap E$, d'après le critère (6), car elle y est égale à $-\infty$), il s'ensuit que $u + \varepsilon v \leqslant h$ partout dans U. En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $u(z) \leqslant h(z)$ pour $z \in U \setminus E$. Mais puisque l'ensemble $U \setminus E$ est dense dans U d'après le théorème 6 et que les fonctions u et h sont toutes deux continues dans U, l'inégalité $u \leqslant h$ est réalisée partout dans U. ◀

Corollaire. *Soit E l'ensemble du théorème 7. Si h est une fonction continue dans D et harmonique dans $D \setminus E$, elle est harmonique dans D.*

▶ Il suffit d'appliquer le théorème 7 aux fonctions h et $-h$. ◀

Prouvons en conclusion un théorème sur la limite supérieure d'une suite de fonctions subharmoniques, qui nous sera utile dans le tome 2 et qui exprime que la convergence est uniforme sous réserve que la suite de fonctions soit uniformément bornée.

Théorème 8 (Hartogs). *Si des fonctions u_k sont subharmoniques dans un domaine D, uniformément bornées sur tout sous-ensemble compact de D et*

$$\limsup_{n\to\infty} u_k(z) \leqslant A \tag{8}$$

en tout point $z \in D$, alors pour tout sous-ensemble $K \Subset D$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier k_0 tel que

$$u_k(z) \leqslant A + \varepsilon \tag{9}$$

pour tout $z \in K$ et tout $k \geqslant k_0$.

▶ Sans perdre en généralité on peut admettre que les fonctions sont uniformément bornées dans D, car K peut être plongé dans un domaine $D' \Subset D$ sur lequel u_k sont uniformément bornées par hypothèse. On peut aussi admettre que $u_k \leqslant 0$ dans D, car au lieu de u_k on peut envisager les fonctions $u_k - M$, où M est la borne supérieure de tous les u_k dans D.

Soit $K \Subset D$ un sous-ensemble dont la distance à ∂D est égale à $3r$. En tout point $z_0 \in K$ on a en vertu du critère de subharmonicité de u_k

$$\pi r^2 u_k(z_0) \leqslant \iint\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \text{ *)}. \tag{10}$$

Servons-nous maintenant du *lemme de Fatou* **) qui dit que pour toute suite bornée de fonctions u_k mesurables sur E ($-\infty \leqslant u_k \leqslant c \leqslant \infty$)

$$\limsup_{k\to\infty} \iint\limits_E u_k\, d\sigma \leqslant \iint\limits_E \limsup_{k\to\infty} u_k\, d\sigma.$$

D'après ce lemme, on a en vertu de (8) $\limsup\limits_{k\to\infty} \iint\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \leqslant$ $\leqslant A\pi r^2$; donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$

$$\iint\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \leqslant \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) \pi r^2. \tag{11}$$

---

*) Pour établir cette inégalité il suffit de multiplier les deux membres de (6) par $r\, dr$ et d'intégrer sur r de 0 à r_0 (cf. n° 1, Annexe).

**) Cf. par exemple l'ouvrage de V. Vladimirov cité à la page 298.

Soit maintenant z un point arbitraire du disque $\{ | z - z_0 | < \delta\}$, où $\delta < r$. Puisque le disque $\{ | \zeta - z | < r + \delta\} \Subset D$, la propriété de subharmonicité nous donne

$$\pi (r+\delta)^2 u_k (z) \leqslant \iint\limits_{\{|\zeta - z| < r+\delta\}} u_k (\zeta)\, d\sigma,$$

et puisqu'il contient le disque $\{ | \zeta - z_0 | < r\}$ et que $u_k \leqslant 0$, on a en vertu de (11)

$$\pi (r+\delta)^2 u_k (z) \leqslant \iint\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k (\zeta)\, d\sigma \leqslant \pi r^2 \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

En choisissant δ (pour A, r et ε fixes) assez petit, on trouve que $z \in \{ | z - z_0 | < \delta\}$ et $u_k (z) \leqslant A + \varepsilon$ pour tout $k \geqslant k_0$. Le lemme de Heine — Borel nous donne la proposition du théorème. ◀

Remarquons enfin qu'avec les fonctions subharmoniques, on étudie les *fonctions superharmoniques* qui sont les analogues des fonctions bidimensionnelles convexes vers le haut. Une fonction superharmonique est une fonction $u : D \to]-\infty, \infty]$ semi-continue inférieurement *) dans D telle que, pour tout disque $U \Subset D$ et toute fonction h harmonique dans U et continue dans $\overline{U}$, l'inégalité $u \geqslant h$ sur ∂U entraîne la même inégalité dans U. L'étude des fonctions superharmoniques se ramène à celle des fonctions subharmoniques, car pour qu'une fonction u soit superharmonique il est nécessaire et suffisant que la fonction $-u$ soit subharmonique.

Si l'on remplace partout les fonctions harmoniques de deux variables (réelles) par des fonctions de même nature de n variables, on peut envisager des fonctions subharmoniques et superharmoniques dans des domaines de l'espace $\mathbf{R}^n$.

Exercices

1. Citer un exemple de fonction φ harmonique dans un disque $U = \{x^2 + y^2 < x\}$, continue dans $\overline{U} \setminus \{0\}$, partout nulle sur $\partial U \setminus \{0\}$ et non identiquement nulle. (Cet exemple montre que si un seul point frontière n'est pas assujetti aux conditions, la solution du problème de Dirichlet est susceptible de ne pas être unique.) (*Réponse* : $\varphi = 1 - \operatorname{Re} 1/z$).

2. Si γ est une courbe différentiable et μ une fonction continue sur γ, la fonction réelle

$$\varphi (z) = \int\limits_{\gamma} \mu (\zeta) \ln |\zeta - z|\, |d\zeta|$$

*) On dit qu'une fonction u est *semi-continue inférieurement* en un point z_0 si $-u$ est continue supérieurement en z_0.

s'appelle potentiel logarithmique de densité μ. Montrer que a) φ est harmonique à l'extérieur de γ ; b) si γ est le cercle $\{ |z| = r\}$ et $\mu \equiv 1$, alors φ est constante dans le disque $\{ |z| < r\}$.

3. Soit φ une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ et partout nulle sur l'axe x. Montrer que $\varphi = \alpha y$, où α est une constante positive (comparer avec l'exercice 12 du chap. IV).

4. Soit u une fonction harmonique dans un domaine D, symétrique par rapport à l'axe réel $\mathbf{R}$. Montrer que si $u = 0$ sur $D \cap \mathbf{R}$, alors $u(z) \equiv -u(\bar{z})$.

5. Soient $f(z)$ et $zf(z)$ des fonctions complexes harmoniques (i.e. des fonctions à valeurs complexes satisfaisant à l'équation de Laplace). Montrer que f est une fonction holomorphe.

6. Montrer que si une série $\sum \varphi_\nu$ de fonctions harmoniques strictement positives dans un domaine D converge au moins en un point $a \in D$, elle convergera uniformément sur tout compact de D.

7. Soit φ une fonction réelle, harmonique dans un domaine fermé D à l'exception d'un nombre fini de points de D en lesquels elle est égale à $-\infty$. Montrer que $\sup\limits_{D} \varphi = \sup\limits_{\partial D} \varphi$.

8. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi \in C^2$ soit subharmonique est que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \geqslant 0.$$

9. Soient φ une fonction subharmonique et u une fonction convexe sur $\mathbf{R}^1$. Montrer que la fonction composée $u \circ \varphi$ est subharmonique.

10. Montrer que la limite d'une suite strictement décroissante de fonctions subharmoniques est une fonction subharmonique.

11. Soit f une fonction complexe harmonique dans un domaine D. Montrer que si $|f| = \text{const}$ dans D, alors $f = \text{const}$.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Adhérence 16, 22
Aire d'un polygone 58
Application 39
— anti-conforme 39, 50
— conforme 30
— homographique 46, 51
Approche élémentaire 177
— générale 181
Automorphisme arbitraire 206
— conforme 205
— homographique 53

Chemin(s) 19
— continûment différentiable 20
— différentiable par morceaux 20
— équivalents 19
— fermé 19
— homotope 88, 89
— de *Jordan* 20
— rectifiable 20
Champ lamellaire 42
— irrotationnel 42
— solénoïdal 42
Classe d'homotopie 89
Composante connexe 23
Conditions de *Cauchy* — *Riemann* 38
Connexité par arcs 23
Convergence 268
Courbe 20
— différentiable par morceaux 22
— de *Jordan* 21, 203, 217, 219
— rectifiable 22

Dérivée formelle 33
Détermination 159, 162, 165
— principale 166
Développement asymptotique 272
Distance de deux ensembles 18
— de *Lobatchevski* 56
Domaine 22
— compact 23, 95
— de convergence 107
— d'holomorphie 148
— homographiquement isomorphe 52
— infiniment connexe 23
— de *Jordan* 23
— multiplement connexe 23
— simplement connexe 23, 214

Elément(s) 152, 160
— analytique 160
— canonique 152
— enchaînés 153
— frontières 218
— non canonique 152
Ensemble fermé 16
— d'indétermination 133
— ouvert 16
Espace métrique 15
Extrémité d'un chemin 19

Famille (de fonctions) localement équicontinue 208
— — — uniformément bornée 208
— — normale 209
— — relativement compacte 209
Faisceau de germes de fonctions analytiques 186
Fonction(s) affine entière 45
— algébriques 198
— analytique 35, 158
— — complète 158
— anti-holomorphe 39
— automorphe 233
— biunivoque 25
— continue 29

Fonctions
— de courant 42
— C-différentiable 32
— C-linéaire 30, 32
— différentielle 35
— élémentaires 162
— exponentielle générale 170
— gamma 146
— harmonique 286
— holomorphe 35, 36
— homographique 45, 206
— injective 25
— méromorphe 135, 228
— modulaire 232
— puissance 62
— — générale 170
— R-différentiable 32
— R-linéaire 32
— semi-continue supérieurement 233
— spectrale 265
— subharmonique 30
— superharmonique 35
— trigonométriques 68
— — inverses 169
— d'une variable complexe 25
Fonctionnelle 210
Forme cartésienne d'un nombre complexe 11
Formule de *Cauchy — Green* 99
— de *Cauchy — Hadamard* 106
— intégrale de *Cauchy* 96
— de *Poisson* 293
Frontière orientée 95

Germe d'une fonction analytique 161

Homéomorphisme 45
— local 183, 186

Indice 192
Inégalités de *Cauchy* 103, 126
Intégrale de *Cauchy* 96
— de *Poisson* 295
— de *Schwarz* 296
Inversion 50
Isomorphisme homographique 51, 52

Lemme de *Fatou* 304
— de *Jordan* 142
— de *Schwarz* 204
Ligne de courant 45
— singulière 130
Longueur d'un chemin 20

Méthode de *Gauchy* 147
— du col 280
— de *Laplace* 275
— variationnelle 212
Métrique euclidienne 14
— de *Lobatchevski* 56
— sphérique 14
Modèle de géométrie de *Lobatchevski* 55
Multiplicité d'un zéro 114

Ordre de branchement 173
— d'une fonction 230, 252
— — , angulaire 262
— d'un pôle 132
— d'un zéro 114

Parallélogramme fondamental 230
Plan fermé 13
— ouvert 13
Point(s) d'accumulation 16
— de branchement 172, 178
— — logarithmique 172, 178
— — d'ordre infini 173
— à caractère multivoque 172
— — univoque 172
— critique 38
— frontière 22
— à l'infini 13
— isolés 128
— singuliers 121, 171
Polynôme indécomposable 200
Potentiel d'un champ 42
— —, complexe 42
Primitive 84
Principe de l'argument 189
— de compacité 208, 210
— de *Lindelöf — Phragmén* 218, 262
Propriété circulaire d'une application 40
Problème de *Dirichlet* 292
Produit 11, 47
— convergent 245, 246
— infini 245
— scalaire 11
— vectoriel 11
Projection stéréographique 13
Prolongement analytique 145, 153, 154

Racine 162
Relation de voisinage 183
Résidu 137, 138
— à l'infini 139
— logarithmique 189

Série(s) de *Bürman — Lagrange* 198
— convergente 101, 239
— de *Laurent* 123
— de *Puiseaux* 175
— de *Taylor* 101, 103, 109
— uniformément convergente 101 239
Sinus elliptique 227
Sphère des nombres complexes 14
— de *Riemann* 14
Surface de *Riemann* 178, 184

Théorème d'*Abel* 106
— de *Bernoulli* 168
— de *Borel* 255
— de *Carathéodory* 217
— de *Cauchy* 81, 88, 90, 136
— d'*Hadamard* 255, 258, 259
— de *Harnack* 291
— de *Hurwitz* 211
— de *Kotelnikov* 265, 267
— de *Kellog* 219
Théorème
— de *Laurent* 121
— de *Lindelöf — Phragmén* 218, 262
Théorème
— de *Liouville* 104, 207
— de *Mittag-Leffler* 239
— de monodromie 153
— de *Montel* 209
— de *Morera* 110
— de *Picard* 231, 234, 235
— de *Poincaré — Volterra* 160
— de *Privalov* 218
— de *Pythagore — Lobatchevski* 59
— de *Riemann* 178, 194, 205, 212, 224
— de *Riesz F.* 218
— de *Riesz M.* 218
— de *Rouché* 193, 201
— de *Runge* 119, 212
— de *Schwarz* 219, 224
— de *Sohotsky* 233
— de *Weierstrasse* 115, 246
Topologie du plan complexe 16
Type (d'une fonction) 255
— angulaire 262
— maximal 255
— minimal 255
— moyen 255

Variété complexe 183
Voisinage pointé 16

Zéro d'une fonction 112